Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

# ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE TIPO LOTKA-VOLTERRA COM ATRASOS

Patrícia Ângelo Batista

Mestrado em Matemática
(Análise Matemática)

2008

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

# ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE TIPO LOTKA-VOLTERRA COM ATRASOS

Patrícia Ângelo Batista

Dissertação orientada pela
Professora Doutora Teresa Faria

Mestrado em Matemática
(Análise Matemática)

2008

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha orientadora, Professora Doutora Teresa Faria, pelo seu apoio, direcção, compreensão e enorme paciência durante o último ano.

Gostava também de agradecer à minha família, em particular aos meus pais, pelo bom ambiente familiar que sempre me proporcionaram e pelo apoio e motivação para terminar esta tese.

Às Professoras Doutoras Maria Adelaide Carreira e Maria Manuel Torres agradeço a oportunidade que me deram de participar no projecto "Matemática a Brincar" que me deu muita da estabilidade financeira durante o último ano e me abriu novos horizontes para o futuro. Agradeço também o seu constante optimismo e motivação.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos meus amigos (por ordem alfabética): Alexandra Norberto, Ana Cristina Alves, Ana Maria Monteiro, Ana Patrícia Silva, Andrea Rodrigues, Carlos Paulo Freitas, Cláudia Fernandes, Cristina Norberto, David Raimundo, Eliana de Castro, Filipe Pedro, Joana Cerveira, Miguel Gonzalez, Pedro Guimarães, Rute Portugal, Sónia Almeida, Tiago Agria e muitos outros não mencionados aqui, por terem estado sempre comigo nos momentos mais difíceis desta tese e por nunca me terem deixado desistir. Em particular, agradeço ao David pela ajuda na revisão literária e ao Carlos Paulo pela ajuda com o LaTeX.

*Patrícia Batista*
*Lisboa, 27 de Outubro de 2008*

## Resumo

O principal objectivo deste trabalho é o estudo da estabilidade assimptótica local e global de equilíbrios positivos de uma classe de modelos populacionais retardados de $n$ espécies de tipo Lotka-Volterra. Analisaremos dois sistemas de tipo Lotka-Volterra e um sistema de redes neuronais, todos com atrasos discretos sendo que um dos sistemas não tem atrasos nos termos "diagonais" e os outros dois têm. Assumimos, em todos os casos, condições de dominância diagonal sobre a matriz de interacção traduzidas em termos de *M-matrizes*, e o estudo da estabilidade absoluta será feito recorrendo à construção de funcionais de Liapunov.



**Palavras-chave:** Sistema de tipo Lotka-Volterra, equações diferenciais funcionais retardadas, estabilidade assimptótica local, estabilidade assimptótica global.



## Abstract

The main subject of this work is the study of local and global asymptotic stability of positive equilibria of a populational retarded model of $n$ species of Lotka-Volterra type. We shall analyse two kinds of Lotka-Volterra type systems and a neural network system, all with discrete delays, one of them with no delays in the "diagonal" terms and the others allowing delays on these terms. We assume, in all cases, diagonal dominance conditions for the interaction matrix, translated in terms of *M-matrices*, and the absolute stability study shall be adresssed by constructing Liapunov functionals.



**Key words:** Lotka-Volterra type system, retarded functional differential equation, local asymptotic stability, global asymptotic stability.

# Conteúdo

# Introdução

Nas últimas décadas, o estudo de Equações Diferenciais Funcionais (EDF's) tem constituído uma área fértil da Matemática. Um grande número de especialistas tem-se dedicado a esse estudo levando a que, actualmente, exista uma vasta literatura sobre a sua teoria qualitativa e sobre as suas aplicações. A teoria das EDF's retardadas (ou seja, as EDF's com atrasos no tempo) assume uma importância particular por ser útil em diversas áreas científicas. Esta teoria é aplicada, a título de exemplo, na modelação de problemas em dinâmica populacional, redes neuronais, epidemiologia e teoria do controlo.

Um problema central no estudo qualitativo de equações diferenciais é conhecer o comportamento das soluções, nomeadamente a estabilidade de soluções estacionárias. Um dos métodos clássicos para estudar a estabilidade de soluções de EDF's retardadas, e em particular a estabilidade de pontos de equilíbrio, consiste em supor que existem termos não retardados (os chamados termos instantâneos de *feedback* negativo) que, em certo sentido, dominam e cancelam o efeito dos atrasos.

O principal objectivo deste trabalho é o estudo da estabilidade assimptótica local e global de equilíbrios positivos de uma classe de modelos populacionais retardados de $n$ espécies de tipo Lotka-Volterra.

No Capítulo 1 são apresentadas as principais definições e resultados da teoria básica de EDF's retardadas, onde se dá particular atenção à teoria de estabilidade de EDF's lineares autónomas, equações estas que serão objecto de estudo em capítulos subsequentes. Além disso, é introduzido o método dos funcionais de Liapunov, instrumento com o qual se fará a análise da estabilidade global dos equilíbrios das equações estudadas neste trabalho, e também algumas noções importantes de análise matricial, com especial incidência nas propriedades das *M-matrizes.* Em seguida, é feita uma introdução aos sistemas de Lotka-Volterra do ponto de vista biológico, abordando, com algum detalhe, situações simples modeladas por equações diferenciais ordinárias e envolvendo apenas duas populações. Finalmente, é introduzida a modelação com EDF's retardadas como uma tentativa de melhor modelar a realidade biológica.

No Capítulo 2 faz-se o estudo de um sistema de tipo Lotka-Volterra com atrasos discretos e sem atrasos nos termos "diagonais". Como exemplo, um sistema deste tipo pode ser utilizado para modelar uma comunidade de $n$ populações em competição ou cooperação. Para este sistema de equações são estabelecidas condições necessárias e suficientes para a estabilidade global *absoluta* (isto é, independente do tamanho dos atrasos) do seu equilíbrio positivo, caso este exista. Com o objectivo de obter essas condições, é imposta uma condição de dominância diagonal dos termos sem atrasos com *feedback* negativo sobre a *matriz de competição* da comunidade, traduzida em termos das chamadas *M-matrizes*. Este estudo é feito recorrrendo à construção de funcionais de Liapunov, técnica utilizada em [16], referência principal deste capítulo.

O Capítulo 3 tem por objectivo completar o estudo iniciado no Capítulo 2. Começa por ser feito um estudo semelhante ao que foi feito no Capítulo 2 para a estabilidade de uma equação linear, embora a equação linear do Capítulo 3 seja mais geral que a do Capítulo 2 por apresentar atrasos nos termos "diagonais". Segue-se a análise da estabilidade global de um sistema de EDF's retardadas, representando uma rede neuronal, e de um sistema de tipo Lotka-Volterra, mais geral que o do Capítulo 2, onde também se estabelecem condições necessárias e suficientes para a estabilidade global absoluta, embora sob condições de dominância diagonal da *matriz de interacção* mais fortes. Para o estudo da estabilidade global no caso do sistema da rede neuronal recorre-se novamente à construção de funcionais de Liapunov, seguindo o que é feito em [2]. Para o sistema de tipo Lotka-Volterra usam-se técnicas utilizadas em [5] e em [6].

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo daremos um conjunto de definições e resultados prévios nas áreas de Equações Diferenciais Funcionais e de Análise Matricial que serão usados nos capítulos que se seguem.

## 1.1 Teoria Básica de Equações Diferenciais Funcionais

Nesta secção faremos uma introdução às Equações Diferenciais Funcionais, desde as definições básicas, passando pela teoria de existência, unicidade e continuação de soluções, até à dependência contínua dos dados iniciais. As definições, resultados e respectivas demonstrações desta secção podem ser encontradas em [14].

### 1.1.1 Definições

Suponhamos que $r > 0$ é um dado número real, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial linear de dimensão $n$ sobre os reais munido de uma norma $|.|$, $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}^n$ munido da norma da convergência uniforme.

Se $[a,b] = [-r, 0]$ seja $C = C([-r,0], \mathbb{R}^n)$ e designemos a norma de um elemento $\phi$ de $C$ por $|\phi| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$. Se

$$\sigma \in \mathbb{R},\ A \geq 0 \quad e \quad x \in C([-\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n),$$

para qualquer $t \in [\sigma, \sigma + A]$ seja $x_t \in C$ definido por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Sejam $D$ um subconjunto de $\mathbb{R} \times C$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma dada função e represente-se por $\dot{x}(t)$ a derivada à direita de uma função $x(t)$ com valores em $\mathbb{R}^n$.

**Definição 1.1.** *Dizemos que a relação,*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

*é uma **equação diferencial funcional retardada** em $D$ e denotaremos esta equação por EDFR. Se quisermos evidenciar que a equação é definida por $f$ escreveremos EDFR($f$).*

**Definição 1.2.** *Dizemos que uma função $x$ é uma **solução** da equação (1.1) em $[\sigma-r, \sigma+A)$ se existirem $\sigma \in \mathbb{R}$ e $A > 0$ tais que $x \in C([\sigma-r, \sigma+A), \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz a equação (1.1) para $t \in [\sigma, \sigma + A)$.*

**Definição 1.3.** *Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$, dizemos que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma **solução** da equação (1.1) **com valor inicial** $\phi$ **em** $\sigma$ ou simplesmente uma **solução que passa por** ($\sigma$,$\phi$) se existir um $A > 0$ tal que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma solução da equação (1.1) em $[\sigma - r, \sigma + A)$ e $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$.*

**Definição 1.4.** *Dizemos que a equação (1.1) é **linear** se*

$$f(t, \phi) = L(t)\phi + h(t), \ t \in I$$

*onde $I$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ e $L(t) : C \to \mathbb{R}^n$ é linear, para qualquer $t \in I$. Se $h \equiv 0$ dizemos que a equação é **linear homogénea** e se $h \neq 0$ dizemos que a equação é **linear não homogénea**.*

**Definição 1.5.** *Dizemos que a equação (1.1) é **autónoma** se*

$$f(t, \phi) = g(\phi)$$

*onde $g$ não depende de $t$.*

Uma equação da forma (1.1) sujeita a uma condição inicial pode ser transformada numa equação integral.

**Lema 1.6.** *Se $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ são dados e $f(t, \phi)$ é contínua, então encontrar uma solução da equação (1.1) que passe por $(\sigma, \phi)$ é equivalente a resolver a equação integral*

$$x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s) ds, \ t \geq \sigma,$$

*sujeita à condição inicial $x_\sigma = \phi$.*

### 1.1.2 Existência, unicidade e dependência contínua

Nesta subsecção, enunciamos um teorema de existência para problemas de valor inicial da equação (1.1), supondo a continuidade de $f$. Também será dado um resultado geral sobre dependência contínua e unicidade de soluções. As ideias usadas nas demonstrações destes teoremas são uma extensão dos argumentos usados para equações diferenciais ordinárias (ver e.g. [12]), no entanto a notação é algo complexa. Aqui apenas apresentaremos os resultados de existência, unicidade e dependência contínua de soluções e uma ideia da demonstração de alguns deles pois a teoria qualitativa de EDF's não é o objectivo desta tese. As demonstrações de todos os resultados apresentados podem ser encontrados em [14].

Antes de apresentarmos os teoremas já mencionados, comecemos com uma observação.

**Lema 1.7.** *Se $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$, então $x_t$ é uma função contínua de $t$ para $t$ em $[\sigma, \sigma + \alpha]$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.40]. □

**Teorema 1.8.** (Existência) *Suponhamos que $\Omega$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times C$ e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$, então existe uma solução da EDFR($f^0$) que passa por $(\sigma, \phi)$. Mais geralmente, se $W \subseteq \Omega$ é compacto e é dada $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, então existe uma vizinhança $V \subseteq \Omega$ de $W$ tal que existe uma vizinhança $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de $f^0$ e um $\alpha > 0$ tal que para qualquer $(\sigma, \phi) \in W$, $f \in U$, existe uma solução $x(\sigma, \phi, f)$ da EDFR($f$) que passa por $(\sigma, \phi)$ e está definida em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.43]. □

Para provar a existência da solução que passa por um ponto $(\sigma, \phi) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times C$, consideramos um $\alpha > 0$ e todas as funções $x$ em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ que são contínuas e coincidem com $\phi$ em $[\sigma - r, \sigma]$; isto é, $x_\sigma = \phi$. Os valores destas funções em $[\sigma, \sigma + \alpha]$ são restritos à classe das funções $x$ tais que $|x(t) - \phi(0)| \leq \beta$ para $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$. É definida a aplicação usual $T$ obtida da correspondente equação integral,

$$\begin{aligned}
T : W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta) \quad &\rightarrow \quad C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n) \\
T(\sigma, \phi, y)(t) = 0, \quad & \quad t \in [-r, 0], \\
T(\sigma, \phi, y)(t) \quad &= \quad \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, \quad t \in I_\alpha
\end{aligned}$$

onde $W$ e $U$ são vizinhanças de $\sigma$ e $\phi$, respectivamente, e onde se definem

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= [0,\alpha], \quad B_\beta = \{\psi \in C : |\psi| \leq \beta\}, \\
\mathcal{A}(\alpha,\beta) &= \{y \in C([-r,\alpha],\mathbb{R}^n) : y_0 = 0, y_t \in B_\beta, t \in I_\alpha\} \quad e \\
\tilde{\phi} &\in C([\sigma - r,\infty),\mathbb{R}^n) \quad por \\
\tilde{\phi}_\sigma &= \phi, \quad \tilde{\phi}(t+\sigma) = \phi(0), \text{ para } t \geq 0 \text{ e } (\sigma,\phi) \in \mathbb{R} \times C
\end{aligned}$$

Depois mostra-se que $\alpha$ e $\beta$ podem ser escolhidos de modo a que $T$ aplique esta classe de funções em si mesma e que seja completamente contínuo. Assim o Teorema do Ponto Fixo de Schauder implica a existência de uma solução.

**Teorema 1.9.** (Dependência contínua) *Suponhamos que* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ *é aberto,* $(\sigma^0,\phi^0) \in \Omega$*,* $f^0 \in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$*, e* $x^0$ *é uma solução da EDFR(*$f^0$*) que passa por* $(\sigma^0,\phi^0)$ *que existe e é única em* $[\sigma^0 - r, b]$*, com* $b > \sigma_0$*. Seja* $W^0 \subseteq \Omega$ *o conjunto definido por*

$$W^0 = \{(t, x_t^0) : t \in [\sigma^0, b]\}$$

*e seja* $V^0$ *uma vizinhança de* $W^0$ *na qual* $f^0$ *é limitada, sendo* $W_0$ *compacto. Se* $(\sigma^k,\phi^k,f^k)$*,* $k = 1,2,\ldots$*, satisfaz* $\sigma^k \to \sigma^0$*,* $\phi^k \to \phi^0$*, e* $|f^k - f^0|_{V^0} \to 0$ *quando* $k \to \infty$*, então existe um* $k^0$ *tal que a EDFR(*$f^k$*) para* $k \geq k^0$ *é tal que cada solução* $x^k = x^k(\sigma^k,\phi^k,f^k)$ *que passa por* $(\sigma^k,\phi^k)$ *existe em* $[\sigma^k - r, b]$ *e* $x^k \to x^0$ *uniformemente em* $[\sigma^0 - r, b]$*. Visto que nem todos os* $x^k$ *estarão definidos em* $[\sigma^0 - r, b]$*, pela convergência uniforme* $x^k \to x^0$ *em* $[\sigma^0 - r, b]$ *o que queremos dizer é que para qualquer* $\epsilon > 0$*, existe* $k_1(\epsilon)$ *tal que* $x^k(t)$*,* $k \geq k_1(\epsilon)$*, está definida em* $[\sigma^0 - r + \epsilon, b]$*, e* $x^k \to x^0$ *uniformemente em* $[\sigma^0 - r + \epsilon, b]$*.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.43]. □

A prova da dependência contínua em relação aos dados iniciais é ligeiramente mais complexa porque a aplicação $T$, atrás definida, depende dos parâmetros e é necessário discutir a dependência dos pontos fixos de $T$ em relação a estes parâmetros. Para provar a dependência contínua de um parâmetro num valor $\lambda_0$, o procedimento usual é assumir um único ponto fixo em $\lambda_0$ e depois provar que a propriedade de "compacidade" de $T$ é uniforme com respeito a conjuntos compactos contendo $\lambda_0$ usando o princípio da contracção de Banach.

**Teorema 1.10.** (Unicidade) *Suponhamos que $\Omega$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}\times C$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ é contínua e $f(t,\phi)$ é lipchitziana em $\phi$ em cada conjunto compacto de $\Omega$. Se $(\sigma,\phi)\in\Omega$, então existe uma única solução da equação (1.1) que passa por $(\sigma,\phi)$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.44]. □

### 1.1.3 Continuação de soluções

**Definição 1.11.** *Suponhamos que $f$ na equação (1.1) é contínua. Se $x$ é uma solução da equação (1.1) num intervalo $[\sigma-r,a)$, $a>\sigma$, dizemos que $\hat{x}$ é uma **continuação de** $x$ se existir um $b>a$, com $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$, tal que $\hat{x}$ está definido em $[\sigma-r,b)$, coincide com $x$ em $[\sigma-r,a)$, e $x$ satisfaz a equação (1.1) em $[\sigma,b)$.*
*Uma solução $x$ diz-se **maximal** se não existe tal continuação; isto é, o intervalo $[\sigma,a)$ é o intervalo maximal de existência da solução $x$.*

A prova da existência de uma solução maximal segue do Lema de Zorn e o intervalo maximal de existência tem de ser aberto.

**Teorema 1.12.** *Suponhamos que $\Omega$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}\times C$ e $f\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Se $x$ é uma solução maximal da equação (1.1) em $[\sigma-r,b)$, então para qualquer conjunto compacto $W$ em $\Omega$, existe um $t_W$ tal que $(t,x_t)\notin W$ para $t_W\leq t<b$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.45]. □

**Teorema 1.13.** *Suponhamos que $\Omega$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}\times C$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ é completamente contínua: isto é, $f$ é contínua e transforma conjuntos limitados de $\Omega$ em conjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$, e $x$ é uma solução maximal da equação (1.1) em $[\sigma-r,b)$. Então para qualquer conjunto fechado e limitado $U$ em $\mathbb{R}\times C$, $U$ em $\Omega$, existe um $t_U$ tal que $(t,x_t)\notin U$ para $t_U\leq t<b$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.46]. □

### 1.1.4 Estabilidade

Suponhamos que $f:\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}^n$ é contínua e consideremos a EDFR($f$) dada por (1.1). Nesta subsecção vamos supor que a função $f$ é completamente contínua e que satisfaz condições de regularidade adicionais de modo a garantir que a solução $x(\sigma,\phi)(t)$ que passa por $(\sigma,\phi)$ seja contínua em $(\sigma,\phi,t)$ para qualquer $t\geq 0$. A teoria que se segue é válida para funções $f:(\alpha,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, onde $\Omega$ é um conjunto aberto em $C$, e é apenas por propósitos notacionais que consideramos o domínio de definição de $f$ como sendo $\mathbb{R} \times C$. Todas as definições e resultados desta subsecção podem ser encontrados em [14].

No que se segue

$$\mathcal{B}(x, \delta) = \{\phi \in C : |\phi - x| < \delta\}$$

**Definição 1.14.** *Suponhamos que $f(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A solução $x = 0$ da equação (1.1) diz-se:*

*i)* ***estável*** *se para qualquer $\sigma \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon, \sigma)$ tal que $\phi \in \mathcal{B}(0, \delta)$ implica que $x_t(\sigma, \phi) \in \mathcal{B}(0, \epsilon)$ para $t \geq \sigma$.*

*ii)* ***assimptoticamente estável*** *se é estável e existe um $b_0 = b_0(\sigma) > 0$ tal que $\phi \in \mathcal{B}(0, b_0)$ implica que $x(\sigma, \phi)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.*

*iii)* ***uniformemente estável*** *se o número $\delta$ da definição de solução estável for independente de $\sigma$.*

*iv)* ***uniformemente assimptoticamente estável*** *se é uniformemente estável e existe $b_0 > 0$ tal que para todo $\eta > 0$, existe um $t_0(\eta)$ tal que $\phi \in \mathcal{B}(0, b_0)$ implica que $x_t(\sigma, \phi) \in \mathcal{B}(0, \eta)$ para $t \geq \sigma + t_0(\eta)$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$.*

*v)* ***(localmente) exponencialmente assimptoticamente estável*** *se existem $b, k, \alpha > 0$ tais que se $\phi \in \mathcal{B}(0, b)$ então $|x(\sigma, \phi)(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-\sigma)}$, para qualquer $t \geq \sigma$.*

*vi)* ***instável*** *se não é estável.*

*Se $y(t)$ é qualquer solução da equação (1.1), então $y$ diz-se* ***estável*** *se a solução $z = 0$ da equação*

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t)$$

*é estável. Os outros conceitos são definidos de modo semelhante.*

**Lema 1.15.** *Se $f(t, \phi)$ é periódica em relação a $t$, então a solução $x = 0$ é estável (assimptoticamente estável) se e só se é uniformemente estável (uniformemente assimptoticamente estável).*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.131]. $\square$

**Definição 1.16.** *Uma solução $x(\sigma, \phi)$ de uma EDFR($f$) é* ***limitada*** *se existe $\beta(\sigma, \phi)$ tal que $|x(\sigma, \phi)(t)| < \beta(\sigma, \phi)$ para $t \geq \sigma - r$.*

Tal como em EDO's (ver e.g. [1,12]) podemos estender o conceito de estabilidade para EDFR's autónomas a conjuntos $J \subset C$. Relembremos que, dado $\delta > 0$, definimos da seguinte forma a bola de raio $\delta$ e centro em $J$

$$\mathcal{B}(J, \delta) = \{\phi \in C : dist(\phi, J) < \delta\} = \{\phi \in C : \min_{\psi \in J} |\psi - \phi| < \delta\}$$

**Definição 1.17.** *Seja $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ contínua e em condições de garantir a existência e unicidade de soluções $x(0, \phi_0, f)$ de $\dot{x}_t = f(x_t)$ definidas para $t \in \mathbb{R}$ e continuamente dependentes dos dados iniciais. Diz-se que $J$ é **estável** para $\dot{x}_t = f(x_t)$ se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \phi_0 \in \mathcal{B}(J, \delta) \Rightarrow x(0, \phi_0, f) \in \mathcal{B}(J, \epsilon), \forall t \geq 0$$

*Caso contrário, $J$ diz-se **instável**.*

## 1.2 Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Lineares Autónomas

### 1.2.1 Generalidades e decomposição do espaço de fase $C$ através da teoria adjunta

Esta secção baseia-se no estudo feito em [20] que tem como principal referência [13]. Ao longo desta secção, vamos considerar $L \in \mathcal{L}(C; \mathbb{R}^n)$, o espaço dos funcionais lineares contínuos de $C$ em $\mathbb{R}^n$, e a seguinte EDFR linear autónoma notada por EDFR(L):

$$\dot{x}_t = L(x_t) \tag{1.2}$$

Sendo $L$ uma aplicação linear contínua, tem-se que $L$ é lipshitziana. Consequentemente, pelos teoremas de existência e unicidade, para cada $\phi \in C$ existe uma única solução maximal, $x(0, \phi, L)$, em $[-r, \alpha)$ com $\alpha > 0$, de $\dot{x}(t) = L(x_t)$ que passa em $(0, \phi)$.

Pelo facto de $L$ ser uma aplicação linear contínua, prova-se que a solução $x(0, \phi, L)$ pode ser extendida a $[-r, +\infty)$. Para simplificar a notação, usa-se $x(\phi) = x(0, \phi, L)$. O facto de $x(\phi)$ estar definida em $[-r, +\infty)$ permite introduzir a seguinte definição:

**Definição 1.18.** *Para cada $t \geq 0$, chama-se **operador solução associado à equação diferencial (1.2)** à aplicação*

$$\begin{aligned} T(t) \ : \ & C \longrightarrow C \\ & \phi \longmapsto x_t(\phi) \end{aligned}$$

**Proposição 1.19.** *Para cada $t \geq 0$, a aplicação $T(t)$ é linear.*

*Demonstração.* Resulta da linearidade de (1.2). $\square$

Antes do próximo resultado relembra-se a definição de $C_0$-*semigrupo* de operadores lineares.

**Definição 1.20.** *Dizemos que a família de operadores $(T(t))_{t\geq 0}$ é um **$C_0$-semigrupo** de operadores lineares se:*

*i)* $T(0) = I$.

*ii)* $T(t+\tau) = T(t)T(\tau)$ *para quaisquer* $t, \tau \geq 0$.

*iii)* $T(t)$ *é um operador linear contínuo para qualquer* $t \geq 0$.

*iv)* $\lim_{t\to 0^+} T(t)\phi = \phi$, *para qualquer* $\phi \in C$.

**Proposição 1.21.** *A família dos operadores solução $(T(t))_{t\geq 0}$, possui as seguintes propriedades:*

1. *É um $C_0$-semigrupo de operadores lineares em $C$.*
2. *Para $t \geq r$, o operador $T(t)$ é compacto.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.27] ou em [13, pág.166]. $\square$

Assim, $(T(t))_{t\geq 0}$ é um $C_0$-semigrupo em $C$. O *gerador infinitesimal* da família $(T(t))_{t\geq 0}$, dado por

$$\begin{aligned} A \; : \; & D(A) \longrightarrow C \\ & \phi \longmapsto \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)\phi - \phi) \end{aligned}$$

com

$$D(A) = \left\{ \phi \in C : \text{ existe } \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)\phi - \phi) \right\}$$

é um operador linear fechado com domínio denso em $C$.

O objectivo do próximo resultado é caracterizar os elementos de $C$ que pertencem a $D(A)$ e determinar $A\phi$ para qualquer $\phi \in D(A)$.

**Proposição 1.22.** *Seja $A$ o gerador infinitesimal do $C_0$-semigrupo de operadores solução associados à equação diferencial (1.2). Então, $\phi \in D(A)$ se e só se $\phi$ tem derivada contínua em $[-r, 0]$ e $\dot{\phi}(0) = L(\phi)$. Além disso tem-se*

$$A\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}(\theta), & -r \leq \theta < 0 \\ L(\phi), & \theta = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.30] ou em [13, pág.167]. □

Como $L \in \mathcal{L}(C;\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema da Representação de Riesz, conclui-se que existe

$$\begin{aligned} \mu \quad : \quad & [-r,0] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & \theta \longmapsto [\mu_{ij}(\theta)]_{i,j} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem $n$ e $\mu_{ij} : [-r,0] \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada, para cada $i,j \in \{1,\dots,n\}$, tal que

$$L(\phi) = \int_{-r}^{0} \phi(\theta)d\mu(\theta) = \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]\phi(\theta)$$

Portanto a equação (1.2) pode ser escrita na forma

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} [d\mu(\theta)]x(t+\theta) \tag{1.4}$$

Vejamos agora algumas propriedades do espectro, dos operadores solução e do gerador infinitesimal. O teorema que se segue caracteriza o espectro do gerador infinitesimal associado ao $C_0$-semigrupo dos operadores solução.

**Teorema 1.23.** *Seja $A$ o gerador infinitesimal do $C_0$-semigrupo dos operadores solução associados à equação (1.2), $(T(t))_{t\geq 0}$. Então $\sigma(A) = \sigma_P(A)$ e*

$$\lambda \in \sigma(A) \textit{ se e só se } \det \Delta(\lambda) = 0$$

*onde*

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta}[d\mu(\theta)] = \lambda I - L(e^{\lambda\cdot} I)$$

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.31] ou em [13, pág.168]. □

Procuremos soluções não triviais de (1.2) da forma exponencial, isto é, da forma

$$x(t) = e^{\lambda t}v, \quad \lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0. \tag{1.5}$$

Temos

$$\begin{aligned} x_t(\theta) &= x(t+\theta) = e^{\lambda(t+\theta)}v = e^{\lambda t}e^{\lambda\theta}v \\ x_t(\cdot) &= e^{\lambda t}e^{\lambda\cdot}v \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
&x(t) \text{ é solução de (1.2) } \Leftrightarrow \\
&\lambda e^{\lambda t} v = L\left(e^{\lambda t} e^{\lambda \cdot} v\right) \Leftrightarrow \\
&\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} L(e^{\lambda \cdot} I) v \Leftrightarrow \\
&\left[\lambda I - L\left(e^{\lambda \cdot} I\right)\right] v = 0.
\end{aligned}
$$

A equação

$$\det\left(\lambda I - L\left(e^{\lambda \cdot} I\right)\right) = 0, \tag{1.6}$$

é chamada a *equação característica* de (1.2) onde

$$L\left(e^{\lambda \cdot} I\right) = \left[\begin{array}{ccc} L\left(e^{\lambda \cdot} e_1\right) & \dots & L\left(e^{\lambda \cdot} e_n\right) \end{array}\right] = \left[L_i\left(e^{\lambda \cdot} e_k\right)\right]_{i,k}$$

onde os $e_k$, $k = 1, \dots, n$, representam os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$ e onde usamos a notação $\Delta(\lambda) = \lambda I - L\left(e^{\lambda \cdot} I\right)$.

Resumindo, (1.5) é solução de (1.2) se e só se $\det \Delta(\lambda) = 0$ e $v$ é vector próprio associado ao valor próprio 0 da matriz $\Delta(\lambda)$.

**Definição 1.24.** *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ o $C_0$-semigrupo dos operadores solução associados à equação (1.2) e $A$ o seu gerador infinitesimal. Diz-se que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **valor próprio**, ou **valor característico**, de (1.2) se $\lambda \in \sigma(A)$.*
*O espaço próprio generalizado de (1.2) associado a $\lambda$ denota-se por $M_\lambda(A)$.*

Das propriedades espectrais de operadores compactos e de $C_0$-semigrupos, tem-se:

**Teorema 1.25.** *Para $(T(t))_{t \geq 0}$ e $A$ como no teorema anterior, são válidas as seguintes propriedades:*

1. *Para $t \geq r$ e $\eta \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tem-se*

$$\eta \in \sigma(T(t)) \Longleftrightarrow \eta \in \sigma_P(T(t))$$

2. *Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \alpha\}$ é finito.*

3. *Para qualquer $\lambda \in \sigma(A)$, tem-se $dim(M_\lambda(A)) < +\infty$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.32]. □

Tendo em vista o estudo da estabilidade de EDFR's lineares da forma (1.2), apresenta-se de seguida um breve resumo da chamada teoria adjunta formal, desenvolvida por Hale. Comece-se por indroduzir alguma notação.

Representa-se por $C^*$ o espaço de Banach $C([0,r];\mathbb{R}^{n^*})$ munido da norma do supremo, onde $\mathbb{R}^{n^*}$ é o conjunto dos vectores linha $1\times n$ com coordenadas em $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^{n^*} = \{[x_1 \dots x_n] : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_0^+$ e $y \in C([\sigma - A, \sigma + r];\mathbb{R}^{n^*})$, para cada $\tau \in [\sigma - A, \sigma]$, denota-se por $y^\tau$ o elemento de $C^*$ definido por

$$y^\tau(s) = y(\tau + s), \quad s \in [0,r].$$

A aplicação

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot) \quad : \quad & C^* \times C \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\alpha,\phi) \longmapsto \alpha(0)\phi(0) - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \alpha(\xi-\theta)[d\mu(\theta)]\phi(\xi)d\xi\end{aligned} \tag{1.7}$$

é chamada *dualidade formal* associada à equação (1.2). Facilmente se verifica que a dualidade formal é bilinear contínua.

A definição que se segue introduz a noção de equação adjunta formal.

**Definição 1.26.** *Define-se a* ***equação diferencial adjunta formal associada à equação (1.4)*** *como sendo a equação:*

$$\dot{y}(\tau) = -\int_{-r}^{0} y(\tau-\theta)[d\mu(\theta)] \tag{1.8}$$

Pelos teoremas de existência e unicidade no espaço $C^*$, em vez de $C$, conclui-se que existe uma única solução $y$ em $(-\infty, r]$ da equação diferencial (1.8) que passa em $(0,\varphi)$, para cada $\varphi \in C^*$. Assim é possível introduzir a definição de operador solução para a equação diferencial adjunta formal (1.8).

**Definição 1.27.** *Para cada $\tau \leq 0$, define-se o* ***operador solução associado à equação (1.8)*** *da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}T^*(\tau) \quad : \quad & C^* \longrightarrow C^* \\ & \varphi \longmapsto y^\tau(\varphi)\end{aligned}$$

*onde $y$ é a única solução de (1.8) que passa em $(0,\varphi)$.*

Considere-se $S(\tau) := T^*(-\tau), \tau \geq 0$. Pode concluir-se que $(S(\tau))_{\tau \geq 0}$ é um $C_0$-semigrupo em $C^*$, com gerador infinitesimal

$$\begin{aligned} A^* \quad : \quad & D(A^*) \subseteq C^* \longrightarrow C^* \\ & \alpha \longmapsto \begin{cases} -\frac{d\alpha}{ds}(s), & 0 < s \leq r \\ \int_{-r}^{0} \alpha(-\theta)[d\mu(\theta)], & s = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

onde

$$D(A^*) = \left\{ \alpha \in C^* : \text{existe } \dot{\alpha} \in C^* \text{ e } \dot{\alpha}(0) = -\int_{-r}^{0} \alpha(-\theta)[d\mu(\theta)] \right\}.$$

**Proposição 1.28.** *Os espectros dos operadores $A$ e $A^*$ coincidem, isto é,*

$$\sigma(A) = \sigma(A^*)$$

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.37] ou em [13, pág.175]. □

$A^*$ possui as mesmas propriedades que o gerador infinitesimal $A$ de $(T(t))_{t \geq 0}$. São portanto válidos os seguintes resultados:

**Proposição 1.29.** *O operador $A^*$ possui as seguintes propriedades:*

1. $\sigma(A^*) = \sigma_P(A^*)$
2. *Para qualquer $\lambda \in \sigma_P(A^*)$, tem-se $dim(M_\lambda(A^*)) < +\infty$. Além disso, $dim(M_\lambda(A^*)) = dim(M_\lambda(A))$.*
3. *Para qualquer $\lambda \in \sigma_P(A^*)$, tem-se $A^*(M_\lambda(A^*)) \subseteq M_\lambda(A^*)$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.36] ou, para *ii*), [13, pág.175]. □

**Proposição 1.30.** $(A^*\alpha, \phi) = (\alpha, A\phi)$, *$\forall \alpha \in D(A^*), \forall \phi \in D(A)$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.36]. □

A Proposição 1.30 justifica a seguinte definição:

**Definição 1.31.** *O operador $A^*$ é designado por* ***adjunto (formal)*** *de $A$.*

Posto isto, é possível provar que o espaço de fase $C$ para a equação (1.2) pode decompor-se numa soma directa de dois subespaços $P$ e $Q$, invariantes para os operadores solução $T(t)$, por forma a reduzir o estudo de uma solução da equação (1.2) que passa em $(0, \phi)$ com $\phi = \phi^P + \phi^Q \in C$, ao estudo das soluções em $P$ e $Q$ que passam em $(0, \phi^P)$ e em $(0, \phi^Q)$, respectivamente. É isto que afirma o seguinte resultado:

**Teorema 1.32.** *Seja $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ um conjunto finito e não vazio de valores característicos da equação (1.2).*
*Considerem-se os espaços*

$$P_\Lambda := \oplus_{i=1}^{p} M_{\lambda_i}(A); \quad P_\Lambda^* := \oplus_{i=1}^{p} M_{\lambda_i}(A^*).$$

*Sejam $\Phi$ e $\Psi$ bases de $P_\Lambda$ e de $P_\Lambda^*$ respectivamente, tais que $(\Psi, \Phi) = I_N$, $N := dim P_\Lambda = dim P_\Lambda^*$.*
*Então*

$$\begin{aligned} C &= P_\Lambda \oplus Q_\Lambda; \\ P_\Lambda &= \{\phi \in C : \phi = \Phi b, \ b \in \mathbb{R}^n\}; \\ Q_\Lambda &= \{\phi \in C : (\Psi, \phi) = 0\}, \end{aligned}$$

*onde $Q_\Lambda$ é um subespaço fechado.*
*Além disso, para qualquer $\phi \in C$, tem-se $\phi = \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda}$, com $\phi^{P_\Lambda} = \Phi(\Psi, \phi)$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.43] ou em [13, pág.178]. □

**Definição 1.33.** *A decomposição do espaço $C$ como soma directa dos espaços $P_\Lambda$ e $Q_\Lambda$, presente no teorema anterior, chama-se **decomposição de $C$ por** $\Lambda$.*

### 1.2.2 Teoria de estabilidade local

Nesta subsecção apresentamos estimativas para o fluxo das soluções da equação diferencial (1.2) com condição inicial, para $t = 0$, em cada um dos subespaços, $P_\Lambda$ e $Q_\Lambda$, que compõem a decomposição de $C$ por $\Lambda$, sendo $\Lambda$ um determinado subconjunto finito não vazio de $\sigma(A)$. De seguida, analisamos a estabilidade de equações lineares autónomas com pequenas perturbações (ver [18]).

Pelo ponto 2 do Teorema 1.25, tem-se que, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\Lambda := \Lambda(\beta) := \{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda \geq \beta\}$$

é finito.

O resultado que se segue desempenha um papel importante no estudo da estabilidade de soluções da equação diferencial (1.2).

**Teorema 1.34.** *Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $\Lambda = \{\lambda \in \sigma(A) : Re\lambda \geq \beta\}$. Considere-se a decomposição de $C$ por $\Lambda$,*

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda.$$

*Então existem constantes positivas $k$ e $\gamma$ tais que*

$$\begin{aligned} ||T(t)\phi^{Q_\Lambda}|| &\leq ke^{(\beta-\gamma)t}||\phi^{Q_\Lambda}||, \quad t \geq 0, \forall \phi^{Q_\Lambda} \in Q_\Lambda; \\ ||T(t)\phi^{P_\Lambda}|| &\leq ke^{(\beta-\gamma)t}||\phi^{P_\Lambda}||, \quad t \leq 0, \forall \phi^{P_\Lambda} \in P_\Lambda; \end{aligned}$$

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.44] ou em [13, pág.181]. □

O resultado que se segue refere-se ao caso em que $\beta = 0$ acima e, consequentemente $\Lambda = \emptyset$, pelo que $P_\Lambda = \{0\}$.

**Corolário 1.35.** *Se todas as raízes da equação característica da equação diferencial (1.2), isto é, da equação* $\det \Delta(\lambda) = 0$*, tiverem parte real negativa, então existem constantes positivas $k$ e $\gamma$ tais que*

$$||T(t)\phi|| \leq ke^{-\gamma t}||\phi||, \quad t \geq 0, \forall \phi \in C.$$

*Demonstração.* Ver e.g. em [20, pág.45] ou em [13, pág.182]. □

Tendo em conta as definições de estabilidade já apresentadas na secção anterior, tal como em EDO's tem-se que se

$$\max\{Re\lambda : \det \Delta(\lambda) = 0\} < 0,$$

então a solução nula de (1.2) é uniformemente e exponencialmente assimptoticamente estável. Se $Re\lambda > 0$ para algum $\lambda$ satisfazendo $\Delta(\lambda) = 0$, então a equação (1.2) é instável. Além disso, se $\det \Delta(\lambda) = 0$ tem uma raiz nula ou imaginária pura não simples, então a equação (1.2) é também instável.

Vemos pois que, quando todas as raízes características da EDF linear (1.2) têm parte real negativa, então a solução nula é exponencialmente assimptoticamente estável. De facto, esta propriedade mantém-se quando se consideram pequenas perturbações (não lineares) de (1.2), como veremos de seguida.

Consideremos a seguinte equação perturbada

$$\dot{x_t} = L(x_t) + F(x_t) \tag{1.9}$$

onde $L$ é como na equação (1.2) e $F : C \to \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável, $F(0) = 0$, $DF(0) = 0$.

**Teorema 1.36.** *Suponhamos que $L : C \to \mathbb{R}^n$ é um funcional linear e contínuo e a solução nula de $EDFR(L)$ é uniformemente localmente exponencialmente assimptoticamente estável. Então a solução nula da equação (1.9) é também uniformemente localmente exponencialmente assimptoticamente estável. Se $Re\lambda > 0$ para algum $\lambda$ satisfazendo* $\det \Delta(\lambda) = 0$*, então a solução nula da equação (1.9) é instável.*

*Demonstração.* Ver o Teorema 1.4.2 de [18] ou o Teorema 9.5.2 de [14]. □

O que este último resultado nos diz é que a estabilidade uniforme e exponencial assimptótica local de uma solução de equilíbrio de uma equação não linear autónoma segue da estabilidade da sua *equação linearizada* em torno do ponto de equilíbrio. Para determinarmos a estabilidade de uma equação linear autónoma teremos de analisar a sua equação característica.

## 1.3 Sistemas Dinâmicos e Invariância

Nesta secção vamos expor algumas propriedades fundamentais de EDFRs autónomas.

Considere-se a EDFR($f$) autónoma

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \tag{1.10}$$

e suponha-se que estamos em condições de existência e unicidade de soluções definidas para $t \geq 0$.

Defina-se o operador integral

$$T(t)(\phi) = x_t(\phi), \quad t \geq 0.$$

A família de transformações $(T(t))_{t\geq 0}$ é um *semi-sistema dinâmico contínuo* no espaço de Banach $X = C([-r,0];\mathbb{R}^n)$, ou seja, $T(t)x, t \geq 0, x \in X$, é contínuo em $t$, $x$ e satisfaz as propriedades

$$T(0) = I, \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad t,s \geq 0.$$

Para qualquer conjunto $B \subset X$, a *órbita positiva* $\gamma^+(B)$ é definida como $\gamma^+(B) = \cup_{t\geq 0} T(t)B$ e o *conjunto $\omega$-limite,* $\omega(B)$ é definido como

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}.$$

Uma *órbita negativa* que passa por um ponto $x$ é uma função $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para qualquer s$\leq 0$, temos $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leq t \leq -s$. De uma maneira óbvia, definimos o *conjunto $\alpha$-limite* de uma órbita negativa, mas no que se segue não precisaremos deste conceito.

**Lema 1.37.** *Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semi-sistema dinâmico em $X$ e se a órbita $\gamma^+(x)$ é pré-compacta, então $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, conexo e invariante. A mesma conclusão é válida para qualquer conjunto conexo $H \subseteq X$ para o qual $\gamma^+(H)$ seja pré-compacta. Finalmente tem-se, $T(t)H \to \omega(H)$ quando $t \to +\infty$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.105]. □

**Definição 1.38.** *Diz-se que um conjunto $K \subset X$ **atrai** um conjunto $H \subset X$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $t_0 = t_0(H, \epsilon)$ tal que $T(t)(H) \subset \mathcal{B}(K, \epsilon)$ para $t \geq t_0$. Diz-se que $T(t), t \geq 0$, é **dissipativo pontualmente** se existe um conjunto limitado $K \subset X$ tal que $K$ atrai pontos de $X$. Diz-se que $K$ é um **atractor global** se $K$ for invariante e atrair os conjuntos limitados de $X$.*
*Um **ponto de equilíbrio** de $T(t), t \geq 0$, é um ponto $x \in X$ tal que $T(t)x = x$.*

**Teorema 1.39.** *Suponha-se que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semi-sistema dinâmico em $X$ e que existe um conjunto compacto $K \subset X$ que atrai conjuntos compactos de $X$, e seja $J = \omega(K)$. Então as seguintes conclusões verificam-se:*

*i) $J = \omega(K)$ é independente de $K$, é um conjunto não vazio, compacto e invariante, e é maximal no que respeita a estas propriedades.*

*ii) $J$ é conexo.*

*iii) $J$ é estável.*

*iv) Para qualquer conjunto compacto $H \subset X$, $J$ atrai $H$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.109]. □

**Teorema 1.40.** *Se existe $t_1 \geq 0$ tal que $T(t)$ é completamente contínuo para $t \geq t_1$ e $T(t), t \geq 0$, é dissipativo pontualmente, então existe um atractor global conexo e compacto $\mathcal{A}$ e existe um ponto de equilíbrio de $T(t)$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [14, pág.113]. □

## 1.4 O Método dos Funcionais de Liapunov

Como vimos na secção 1.2 para determinar a estabilidade de uma equação linear autónoma temos de analisar a sua equação característica. Ora, esta análise revela-se, geralmente, muito complicada, mesmo para EDFR's com apenas dois atrasos discretos ou para sistemas de EDFR's com um atraso discreto.

Para ultrapassar esta dificuldade usa-se, por vezes, o método dos funcionais de Liapunov para obter condições suficientes para a estabilidade e instabilidade de equilíbrios de EDFR's. Além disso, os resultados de estabilidade obtidos deste modo são, geralmente, globais, em contraste com os resultados de estabilidade local obtidos pela análise da equação característica. Todas as definições, resultados e respectivas demonstrações desta secção podem ser encontradas em [18].

No que se segue, apresentamos o método dos funcionais de Liapunov no contexto de uma EDFR($f$) como (1.1)

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

onde $f : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ é completamente contínua e $f(t, 0) = 0$.

Seja $V : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}$ contínua e $x(\sigma, \phi)$ a solução de (1.1) que passa em $(\sigma, \phi)$. Denotamos

$$\dot{V} = \dot{V}(t, \phi) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h} \left[ V(t + h, x_{t+h}(t, \phi)) - V(t, \phi) \right]$$

O próximo resultado contém resultados de estabilidade gerais do método dos funcionais de Liapunov.

**Teorema 1.41.** *Sejam $u(s), v(s), w(s) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínuas e não decrescentes, $u(s) > 0$, $v(s) > 0$ para $s > 0$, e $u(0) = v(0) = w(0) = 0$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

*i) Se existe $V : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} u(|\phi(0)|) &\leq V(t, \phi) \leq v(||\phi||) \\ \dot{V}(t, \phi) &\leq -w(|\phi(0)|) \end{aligned}$$

*então $x = 0$ é uniformemente estável.*

*ii) Se, além de i), $\lim_{s \to +\infty} u(s) = +\infty$, então as soluções de (1.1) são uniformemente limitadas, isto é, para qualquer $\alpha > 0$, existe um $\beta = \beta(\alpha) > 0$ tal que, para $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\phi \in C$, $||\phi|| < \alpha$, se tem $|x(\sigma, \phi)(t)| \leq \beta$ para todo $t \geq \sigma$.*

*iii) Se, além de i), $w(s) > 0$ para $s > 0$, então $x = 0$ é uniformemente assimptoticamente estável.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [18, pág.27]. $\square$

Consideremos agora uma EDFR autónoma

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \tag{1.11}$$

onde $f : C \to \mathbb{R}^n$ é completamente contínua e as soluções de (1.11) são únicas e continuamente dependentes dos dados iniciais, definidas para $t \geq 0$.

Denotamos por $x(\phi)$ a solução de (1.11) que passa por $(0, \phi)$.

Para um funcional contínuo $V : C \to \mathbb{R}$, definimos

$$\dot{V}(\phi) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h} \left[ V(x_h(\phi)) - V(\phi) \right]$$

ou seja, a derivada superior direita de $V$ ao longo de uma solução de (1.11).

Precisamos da seguinte definição:

**Definição 1.42.** *Dizemos que $V : C \to \mathbb{R}$ é um **funcional de Liapunov** num conjunto $G$ em $C$ para a equação (1.11) se for contínuo em $\bar{G}$ e $\dot{V} \leq 0$ em $G$. Definimos também os seguintes conjuntos*

$E = \{\phi \in \bar{G} : \dot{V}(\phi) = 0\}$

$M =$ *maior subconjunto de $E$ que é invariante com respeito à equação (1.11).*

**Teorema 1.43.** *Se $V$ é um funcional de Liapunov em $G$ e $x_t(\phi)$ é uma solução limitada de (1.11) que permanece em $G$, então $\omega(\phi) \subset M$, isto é, $x_t(\phi) \to M$ quando $t \to \infty$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [18, pág.30]. $\square$

**Definição 1.44.** *Dada a equação (1.11), suponha-se que $x^*$ é um seu equilíbrio. Diz-se que $x^*$ é **globalmente assimptoticamente estável** (num conjunto $S$ de soluções de (1.11)) se $x^*$ é estável e $x(t) \to x^*$ quando $x \to +\infty$, para qualquer solução $x(t)$ em $S$.*

**Corolário 1.45.** *Suponhamos que $a(.)$ e $b(.)$ são funções não negativas e contínuas, $a(0) = b(0) = 0$, $\lim_{s\to\infty} a(s) = +\infty$ e que $V : C \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz*

$$V(\phi) \geq a(|\phi(0)|), \quad \dot{V}(\phi) \leq -b(|\phi(0)|)$$

*Então a solução $x = 0$ da equação (1.11) é uniformemente estável e toda a solução é limitada. Se, além disso, $b(s) > 0$ para $s > 0$, então $x = 0$ é globalmente assimptoticamene estável.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [18, pág.30]. □

A ideia para provar este último corolário é observar que a estabilidade uniforme de $x = 0$ segue directamente do Teorema 1.43 porque (1.11) é autónoma e depois, usando o facto de $V(\phi) \geq a(|\phi(0)|)$ e $\lim_{s\to\infty} a(s) = +\infty$, prova-se que as soluções são limitadas. Com a condição adicional $b(s) > 0$ conclui-se que o conjunto $M$ da definição 1.42 se reduz a zero e a estabilidade global segue do Teorema 1.43.

## 1.5 Análise Matricial

### 1.5.1 O Teorema de Laplace

O objectivo desta subsecção é formular o Teorema de Laplace, que dá um algoritmo para calcular o determinante de uma matriz quadrada por meio da expansão nos chamados cofactores, definidos de seguida. Todos os resultados desta secção podem ser encontrados em [19].

Se $A$ é uma matriz quadrada $n\times n$, então o determinante de uma submatriz de $A$, $p \times p$ com $1 \leq p \leq n$, obtida de $A$ tirando $n-p$ linhas e colunas, é chamado um *menor de ordem* $p$ de $A$. Em mais detalhe, se as linhas e as colunas que ficam são dadas por índices

$$1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_p < n, \quad 1 < j_1 < j_2 < \ldots < j_p < n \tag{1.12}$$

respectivamente, então o correspondente menor $p \times p$ é denotado por

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} = \det[a_{i_k} a_{j_k}]_{k=1}^{p} \tag{1.13}$$

Os menores para os quais $i_k = j_k$ para $k = 1, \ldots, p$, são chamados os *menores principais de $A$ de ordem $p$*. Chamamos *menor complementar* do menor de ordem $p$ de $A$ ao determinante da submatriz da matriz quadrada $A$ resultante da supressão das linhas e das colunas listadas em (1.12). É denotado por:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}^C$$

O *cofactor complementar* de (1.13) é então definido por:

$$A^C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} = (-1)^s A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}^C$$

onde $s = (i_1 + \ldots + i_p) + (j_1 + \ldots + j_p)$.

Apresentamos, finalmente, o Teorema de Laplace que nos permite calcular o determinante de uma matriz quadrada $A$ utilizando os seus menores e respectivos cofactores complementares.

**Teorema 1.46.** (Teorema de Laplace) *Seja $A$ uma matriz $n \times n$ arbitrária e escolha-se quaisquer $p$ linhas (ou colunas) de $A$. Então* $\det A$ *é igual à soma de todos os $C_p^n$ menores que estão nessas linhas com os seus correspondentes cofactores complementares:*

$$\det A = \sum_j A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix} A^C \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix}$$

*onde a soma se estende sobre todos os $C_p^n$ conjuntos distintos de índices (coluna), $j_1, \ldots, j_p$ $(1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_p \leq n)$. Ou equivalentemente, usando colunas,*

$$\det A = \sum_i A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix} A^C \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix}$$

*onde $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_p \leq n$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [19, pág.37]. □

### 1.5.2 O Teorema de Gerschgorin

O objectivo desta subsecção é fazer uma pequena análise da questão da localização, no plano complexo, dos valores próprios de uma dada matriz $A$ (ver [9]). Um primeiro resultado de localização resulta da estimativa seguinte:

$$\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \leq ||A||,$$

qualquer que seja a norma matricial escolhida. Esta estimativa significa que todos os valores próprios de $A$ se encontram no disco de $\mathbb{C}$ de centro na origem e raio $||A||$. Um resultado mais preciso é dado pelo Teorema de Gerschgorin.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n$, defina-se

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

e seja

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

o disco de centro $a_{ii}$ e raio $r_i$.

**Teorema 1.47.** (Teorema de Gershgorin) *Seja $\lambda$ um valor próprio de $A$. Então*

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

*Além disso, se $m < n$ discos $D_i$ formam um conexo $S \subset \mathbb{C}$, disjunto dos restantes $n - m$ discos, então $S$ contém precisamente $m$ valores próprios, contando com as suas multiplicidades como zeros do polinómio característico.*

**Nota 1.48.** *Se dois discos $D_1$ e $D_2$ se intersectam num só ponto e a sua união é disjunta dos restantes, os dois valores próprios que existem em $D_1 \cup D_2$ um está em $D_1$ e o outro está em $D_2$.*

### 1.5.3 Propriedades das $M$-matrizes

Nesta secção introduzimos os conceitos de $M$-matriz e matriz fracamente diagonalmente dominante e enunciamos algumas das suas propriedades. Todos os resultados apresentados nesta secção podem ser encontrados em [8].

Seja $\mathcal{M}_{n,m}$ o conjunto das matrizes reais com $n$ linhas e $m$ colunas e $\mathcal{M}_n$ o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem $n$. Começamos por introduzir a classe $Z_n$ ($n \geq 1$) que é o conjunto de todas as matrizes de $\mathcal{M}_n$ cujas entradas não diagonais são todas não positivas:

$$Z_n = \{A = [a_{ik}] \in \mathcal{M}_n : a_{ik} \leq 0 \text{ para } i \neq k\}$$

Vamos denotar a união de todas as classes $Z_n$ por $Z := \bigcup_n Z_n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Definição 1.49.** *Sejam $v \in \mathbb{R}^n$ um vector de ordem $n$ e $A, B \in \mathcal{M}_n$, ou seja, matrizes quadradas reais de ordem $n$. Diz-se que $v$ é um **vector positivo**, $v > 0$, se $v_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$; diz-se que $A$ é uma **matriz positiva**, $A > 0$, se $a_{ij} > 0$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Além disso, diz-se que $A \geq B$ se $A - B \geq 0$.*

#### Matrizes de classe $K$ ou M-matrizes não singulares

Antes de apresentarmos a definição de *M-matriz não singular* ou *matriz de classe $K$* vejamos o seguinte teorema fundamental:

**Teorema 1.50.** *Seja $A$ uma matriz de $Z_n$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *Existe um vector $x \geq 0$ tal que $Ax > 0$.*

2. *Existe um vector $x > 0$ tal que $Ax > 0$.*

3. *Existe uma matriz diagonal $D$ de entradas diagonais positivas, tal que as entradas da matriz $AD = [w_{ik}]$ satisfazem a condição*

$$w_{ii} > \sum_{k \neq i} |w_{ik}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

*ou seja, sendo $d_i$, $i = 1, \ldots, n$, as entradas não nulas da matriz $D$, tem-se*

$$d_i a_{ii} > \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

4. *Sempre que $B \in Z_n$ e $B \geq A$, então $B$ é não singular.*

5. *Todo o valor próprio real de qualquer submatriz principal de $A$ é positivo.*

6. *Todos os menores principais de $A$ são positivos.*

7. *Para cada $k = 1, \ldots, n$, a soma de todos os menores principais de ordem $k$ da matriz $A$ é positiva.*

8. *Todo o valor próprio real da matriz $A$ é positivo.*

9. *A parte real de qualquer valor próprio de $A$ é positiva.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [8, pág.114]. □

**Definição 1.51.** *Diz-se que uma matriz de $Z$ é uma **M-matriz não singular** ou uma **matriz de classe K** se satisfizer (para o $n$ correspondente) uma das condições do Teorema 1.50 e logo todas elas.*

### Matrizes de classe $K_0$ ou $M$-matrizes

Começamos por apresentar o seguinte resultado:

**Teorema 1.52.** *Seja $A$ uma matriz de $Z_n$. Então as seguintes propriedades são equivalentes.*

1. *$A + \epsilon$ é de classe $K$ para qualquer $\epsilon > 0$.*

2. *Qualquer valor próprio real de qualquer submatriz principal de $A$ é não negativo.*

3. *Todos os menores principais de $A$ são não negativos.*

4. *Para cada $k = 1, \ldots, n$, a soma de todos os menores principais de ordem $k$ da matriz $A$ é não negativa.*

5. *Todo o valor próprio real de $A$ é não negativo.*

6. *Todo o valor próprio da matriz $A$ tem parte real não negativa.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [8, pág.121]. □

Este teorema motiva a próxima definição.

**Definição 1.53.** *Diz-se que uma matriz de $Z$ é uma **M-matriz** ou uma **matriz de classe** $K_0$ se satisfizer (para o $n$ correspondente) uma das condições do Teorema 1.52 e logo todas elas.*

Observe-se o seguinte:

**Teorema 1.54.** *Uma matriz de classe $K_0$ é uma matriz de classe $K$ se e só se é não-singular.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [8, pág.122]. □

Os próximos resultados estão relacionados com certas propriedades das matrizes de classe $K$ e de classe $K_0$.

**Teorema 1.55.** *Se $A$ é uma matriz de classe $K$, então $A^T$ é uma matriz de classe $K$. Se $A$ é uma matriz de classe $K_0$, então $A^T$ é uma matriz de classe $K_0$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [8, pág.123]. □

**Teorema 1.56.** *Se $A$ é uma matriz de classe $K$, $B \in Z$ e $B \geq A$, então $B$ é uma matriz de classe $K$. Se $A$ é uma matriz de classe $K_0$, $B \in Z$ e $B \geq A$, então $B$ é uma matriz de classe $K_0$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [8, pág.123]. □

**Definição 1.57.** *Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n$ diz-se **redutível** se se tem uma das seguintes situações:*

1. $n = 1$ *ou* $A = 0$.

*2. Se $n \geq 2$, existe uma matriz de permutação $P \in \mathcal{M}_n$ e um inteiro $r$ com $1 \leq r \leq n-1$ tal que*

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

*onde $B \in \mathcal{M}_r$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}$, $C \in \mathcal{M}_{r,n-r}$ e $0 \in \mathcal{M}_{n-r}$.*

*Uma matriz que não seja redutível diz-se* ***irredutível****.*

Desta definição resulta que $A$ é uma matriz redutível se e só se existir uma permutação, ou seja, uma troca de linhas e colunas em simultâneo, que transforme a matriz $A$ numa matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & \dots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \dots & \dots & A_{2k} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{kk} \end{bmatrix}$$

com $A_{ii}$ irredutível ou zero para $i = 1, \dots, k$.

**Teorema 1.58.** *Se $A$ é uma matriz de classe $K_0$ e é irredutível, então existe um vector $x > 0$ tal que $Ax \geq 0$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [8, pág.124]. □

**Teorema 1.59.** *Se $A \in Z$ e se existe um vector positivo $x$ tal que $Ax \geq 0$, então $A$ é uma matriz de classe $K_0$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [8, pág.124]. □

Note-se no entanto que, em geral, a recíproca do Teorema 1.59 não é verdadeira.

**Teorema 1.60.** *Seja $A \in Z$ uma matriz irredutível. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um vector $x > 0$ tal que $Ax > 0$.*
2. *Existe um vector $x > 0$ tal que $Ax \geq 0$, $Ax \neq 0$.*
3. *$A$ é uma matriz de classe $K$.*
4. *$A^{-1} > 0$.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [8, pág.124]. □

Finalmente introduzimos o conceito base do Capítulo 2, o de *matriz fracamente diagonalmente dominante*, e relacionamos este mesmo conceito com o conceito de $M$-matriz desenvolvido anteriormente.

**Definição 1.61.** *Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_n$, seja $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ a matriz de entradas*

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ii}, & se\ i = j \\ |a_{ij}|, & se\ i \neq j \end{cases}$$

*A matriz $A$ diz-se **fracamente diagonalmente dominante** se todos os menores principais de $-\tilde{A}$ são não-negativos.*

Note-se que, de acordo com a definição de $M$-matriz dada anteriormente, dizer que $A$ é uma matriz fracamente diagonalmente dominante é equivalente a dizer que a matriz $-\tilde{A}$ correspondente é uma $M$-matriz.

## 1.6 Sistemas de Lotka-Volterra: uma introdução biológica

Nesta secção introduzimos alguns conceitos usados em dinâmica populacional e motivamos o estudo de certas interacções entre organismos existentes na natureza que podem ser modeladas por sistemas de Lotka-Volterra. As principais referências desta secção são [15], [7], [10] e [4].

### 1.6.1 A ecologia das populações

A Ecologia estuda as relações entre os organismos e o seu meio ambiente, incluindo, em particular, as interacções entre diferentes espécies.

Começamos por observar que nenhuma população pode crescer indefinidamente a uma taxa constante, ou seja, ter um *crescimento exponencial* do tipo:

$$\dot{x} = rx \tag{1.14}$$

onde $x$ representa a densidade populacional da espécie considerada e $r > 0$ a taxa de crescimento. O crescimento incontrolado das populações não é realista pois atinge rapidamente os limites dos recursos naturais. Assim vamos partir do príncipio que as populações crescem segundo a *Equação Logística*:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{1.15}$$

onde $x$ representa a densidade populacional da espécie considerada, $r$ a taxa de crescimento e $K > 0$ é a "carrying capacity" do meio. As populações que apresentam este tipo de crescimento regulam a sua densidade em função dos recursos do meio.

Num ecossistema existe uma rede de dependências entre organismos com centenas de componentes que são bastante difíceis de modelar. Numa primeira aproximação podemos distinguir três situações básicas:

- *Competição:* Duas espécies são rivais na exploração de um recurso comum e limitado. Quanto maior é a densidade de uma das espécies, mais prejudicial é para a outra espécie. Devido à importância da competição como um factor limitante na evolução, esta situação tem atraído uma atenção considerável.

- *Cooperação:* Esta situação é inversa da competição pois ambas as espécies beneficiam da presença da outra. Quanto maior é a densidade de uma das espécies, melhor é para a outra espécie. É um exemplo desta relação, o líquen, que é uma associação entre uma alga e um fungo. Estas relações de mutualismo têm recebido pouca atenção em ecologia teórica comparativamente com a competição mas são extremamente importantes na comunidade biótica.

- *Parasitismo:* Esta é uma relação assimétrica em que os parasitas benificiam da presença do hospedeiro mas este não é beneficiado pela presença do parasita. A *Predação*, cujo estudo iremos aprofundar nas próximas secções, pode ser considerado um caso extremo de parasitismo em que o predador é parasita da presa.

### 1.6.2 Sistemas de Lotka-Volterra para duas populações

As interacções entre duas populações de que falaremos nesta subsecção são geralmente modeladas por sistemas de Lotka-Volterra.

#### Predação

Motivado pelo aumento inesperado de peixes predadores no Mar Adriático nos anos que se seguiram à Primeira Guerra Mundial, Volterra estudou e apresentou o primeiro modelo de um sistema presa-predador. Assumiu que a taxa de crescimento da população de presas, $x$, na ausência de predadores, é dada por uma constante positiva $a$, mas decresce linearmente como função da densidade do predador $y$. Na ausência de presas, os predadores não sobrevivem, o que se traduz numa taxa de crescimento negativa, mas a sua densidade cresce com o aumento da densidade de presas. Isto leva ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases} \tag{1.16}$$

onde $a, b, c, d > 0$.

Podemos escrever imediatamente três soluções deste sistema:

i) $x(t) = y(t) = 0$

ii) $x(t) = 0$ $y(t) = y(0)e^{-ct}$ (para qualquer $y(0) > 0$)

iii) $y(t) = 0$ $x(t) = x(0)e^{at}$ (para qualquer $x(0) > 0$)

a que correspondem as três órbitas:

i) a origem $(0, 0)$ que é um equilíbrio.

ii) o semi-eixo positivo dos $y$.

iii) o semi-eixo positivo dos $x$.

Juntas, estas três órbitas formam a fronteira do octante positivo

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \tag{1.17}$$

Visto que as densidades populacionais têm de ser não-negativas, vamos apenas considerar a restrição da equação (1.16) a $\mathbb{R}^2_+$. Este conjunto é invariante no sentido em que qualquer solução que comece neste conjunto permanece nele para qualquer instante (positivo ou negativo) em que estiver definida.

Existe um único equilíbrio em $int\mathbb{R}^2_+$. Este equilíbrio, que vamos denotar por $F = (\bar{x}, \bar{y})$, satisfaz as equações

$$\begin{aligned} \bar{x}(a - b\bar{y}) &= 0 \\ \bar{y}(-c + d\bar{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Visto que $\bar{x} > 0$ e $\bar{y} > 0$, isto implica

$$\bar{x} = \frac{c}{d} \quad \bar{y} = \frac{a}{b} \tag{1.18}$$

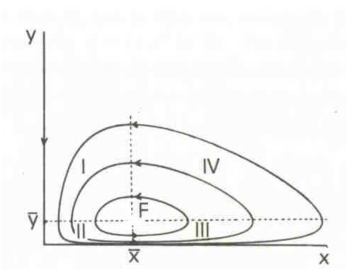


Figura 1.1: Representação das órbitas de (1.16) em $\mathbb{R}^2$.

e é possível provar que $F$ é circundado por órbitas periódicas, ou seja, $F$ é um centro. Como podemos ver na Figura 1.1, as densidades de predador e presa vão oscilar periodicamente, com ambas amplitude e frequência das oscilações dependendo das condições iniciais. $F$ é assim um equilíbrio estável mas não assimptoticamente estável.

Vimos que a equação (1.16) tem a particularidade de, na ausência de predadores, a população de presas estar sujeita a crescimento exponencial: $\dot{x} = ax$. Esta característica do modelo não é, de todo, realista por isso passamos a considerar a competição dentro da população de presas e assumimos o crescimento logístico da mesma: $\dot{x} = x(a-ex)$. Também podemos considerar o crescimento logístico da população de predadores embora esta nunca cresça indefinidamente. As equações de Lotka-Volterra para a predação passam a ser:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - ex - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx - fy) \end{cases} \tag{1.19}$$

com $a, b, c, d, e > 0$ e $f \geq 0$. Mais uma vez, $\mathbb{R}^2_+$ é invariante. A sua fronteira consiste em cinco órbitas: os dois equilíbrios $O = (0, 0)$ e $P = (\frac{a}{e}, 0)$, os dois intervalos $(0, \frac{a}{c})$ e $(\frac{a}{c}, +\infty)$ do semi-eixo positivo dos $x$ e o semi-eixo positivo dos $y$.

Para termos uma ideia do que se passa em $int\mathbb{R}^2_+$ na presença das duas populações, vamos analisar as *isoclinas*, que são os conjuntos onde o campo vectorial é vertical, a $x$-isoclina e onde o campo vectorial é horizontal, a $y$-isoclina. Estes conjuntos satisfazem as seguintes equações

$$ex + by = a \tag{1.20}$$

$$dx - fy = c \tag{1.21}$$

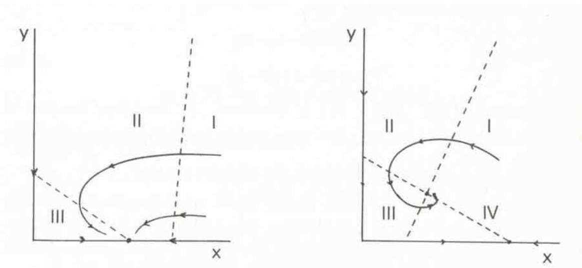


Figura 1.2: Representação das órbitas de (1.19) em $\mathbb{R}^2$.

respectivamente. Dependendo dos parâmetros, estas linhas podem ou não intersectar-se em $int\mathbb{R}^2_+$. Os gráficos da Figura 1.2 ilustram os dois casos.

No primeiro caso, os predadores irão desaparecer e a população de presas converge para o limite $\frac{a}{e}$, que corresponde à "carrying capacity" da equação logística $\dot{x} = x(a - ex)$ que, na ausência do predador, regula o seu crescimento.

No segundo caso as isoclinas intersectam-se num ponto $F = (\bar{x}, \bar{y})$ em $int\mathbb{R}^2_+$, este ponto é um equilíbrio e as suas coordenadas satisfazem o sistema linear formado pelas equações (1.20) e (1.21). A análise dos valores próprios da matriz associada à equação linearizada de (1.19) em torno de $F$ revela que as órbitas descrevem espirais que se aproximam de $F$, ou seja, este é um equilíbrio assimptoticamente estável.

**Competição**

Pretendemos modelar a interacção de duas espécies competidoras. Se $x$ e $y$ denotarem as suas densidades, então as suas taxas de crescimento $\dot{x}/x$ e $\dot{y}/y$ vão ser funções decrescentes de ambos $x$ e $y$, visto que a competição pode ocorrer entre indivíduos de espécies diferentes, denominando-se *interespecífica*, ou entre indivíduos da mesma espécie, denominando-se *intraespecífica*. Assumindo que este decrescimento é linear e que as duas populações em competição têm crescimento logístico, o modelo Lotka-Volterra para a competição entre duas espécies é o seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - cy) \\ \dot{y} = y(d - ex - fy) \end{cases} \tag{1.22}$$

onde $a, b, c, d, e, f > 0$, $a$ e $d$ representam as taxas intrínsecas de crescimento, $a/b$ e $d/e$ representam as "carrying capacities" das espécies $x$ e $y$, respectivamente, enquanto que as razões $c/b$ e $f/e$ representam os coeficientes de competição da espécie $y$ sobre a espécie $x$ e da espécie $x$ sobre a espécie $y$, respectivamente. Mais uma vez, visto que a fronteira de $\mathbb{R}^2_+$ é invariante, também o é $\mathbb{R}^2_+$. De facto, na ausência de uma das populações, a outra segue o crescimento logístico.

As $x$- e $y$- isoclinas satisfazem

$$\begin{aligned} a - bx - cy &= 0 \\ d - ex - fy &= 0 \end{aligned}$$

em $int\mathbb{R}^2_+$. Estas são rectas de declive negativo. Da análise das isoclinas podem ocorrer as três situações ilustradas na Figura 1.3.

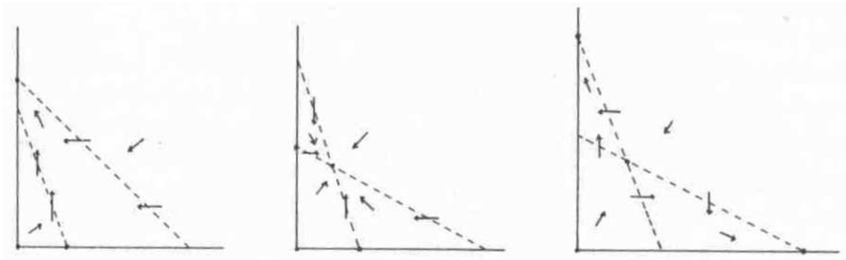

Figura 1.3: a), b) e c): Representações do campo vectorial de (1.22) em $\mathbb{R}^2$.

Na situação $a)$ as duas rectas não se intersectam e não é possível a coexistência. Se assumirmos que $a/b = d/e$, ou seja, que as espécies são ecologicamente muito parecidas, verificamos que uma espécie elimina a outra se a primeira ultrapassar a competição intraespecífica dentro da segunda, por exemplo, no caso em que a espécie $x$ elimina a espécie $y$ tem-se $f/e > 1$ e $c/b < 1$.

Nas situações $b)$ e $c)$ as duas isoclinas intersectam-se num ponto $F = (\bar{x}, \bar{y})$ cujas coordenadas são positivas e satisfazem as equações acima.

A matriz de linearização de (1.22) dada por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx}(F) & \frac{df_1}{dy}(F) \\ \frac{df_2}{dx}(F) & \frac{df_2}{dy}(F) \end{bmatrix}$$

onde $f_1(x, y) = x(a - bx - cy)$ e $f_2(x, y) = y(d - ex - fy)$, em torno do equilíbrio $F = \left(\frac{af-cd}{bf-ce}, \frac{bd-ae}{bf-ce}\right)$ é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} -b\bar{x} & -c\bar{x} \\ -e\bar{y} & f\bar{y} \end{bmatrix}$$

Na situação $b$) os valores próprios de $A$ têm todos parte real negativa logo $F$ é um equilíbrio assimptoticamente estável. Na prática, este é o único caso em que a coexistência entre as duas espécies é possível, não obstante o facto de competirem.

Na situação $c$) tem-se $\det A = \bar{x}\bar{y}(bf - ce) < 0$ e consequentemente $F$ é um ponto de sela. Neste caso, matematicamente a coexistência é possível pois existe um ponto de equilíbrio mas, como este equilíbrio é instável, na realidade biológica a coexistência não é possível. A espécie que acaba por ser eliminada depende das condições iniciais do sistema, chamando-se por isso *competição contingente*. Se assumirmos novamente $a/b = d/e$, neste caso em particular tem-se $f/e > 1$ e $c/b > 1$, ou seja, a competição interespecífica é mais forte que a competição intraespecífica. Este caso é um dos modelos matemáticos mais simples que prevê a existência de comunidades estáveis alternativas que são espécies que eliminaram no passado outras espécies competidoras e agora vivem sozinhas.

### 1.6.3 Sistemas de Lotka-Volterra para mais de duas populações

Nesta subsecção vamos considerar $n$ espécies diferentes vivendo juntas num mesmo "habitat" onde a taxa de crescimento de cada uma das espécies depende da quantidade de todas as outras. Denotando a quantidade da $i$-ésima espécie por $x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a dinâmica é traduzida pelo sistema de equações diferenciais de tipo Kolmogorov,

$$\dot{x}_i = x_i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.23}$$

O espaço de fase para este tipo de sistema é:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

Os pontos fronteira de $\mathbb{R}^n_+$ estão nos hiper-planos coordenados $x_i = 0$, que correspondem aos estados onde a espécie $i$ está ausente. Estas "faces" são invariantes, visto que $x_i(t) = 0$ é a única solução da $i$-ésima equação de (1.23) satisfazendo $x_i(0) = 0$. Assim, a fronteira $fr\mathbb{R}^n_+$, e consequentemente todo o $\mathbb{R}^n_+$, são invariantes sob (1.23). Logo, também é invariante $int\mathbb{R}^n_+$ o que significa que se $x_i(0) > 0$ então $x_i(t) > 0$ para todo $t$. A densidade $x_i(t)$ pode, no entanto, aproximar-se de zero o que significa a extinção da espécie.

O carácter da relação entre a espécie $j$ e a espécie $i$ é determinada pela resposta da taxa de crescimento per capita $\dot{x}_j/x_j$ ao aumento de $x_i$ e vice versa trocando os índices $j$ e $i$, ou seja, a relação depende do sinal da derivada de $f_j$ com respeito a $x_i$, e vice versa. Existem três casos especiais importantes:

i) Se para cada $j \neq i$ e em todo o octante positivo se tem $f'_{jx_i} f'_{ix_j} \leq 0$, então dizemos que (1.23) representa um *sistema presa-predador*; se $f'_{jx_i} < 0$ e $f'_{ix_j} > 0$ então a espécie $j$ é presa da espécie $i$.

ii) Se para cada $j \neq i$ e em todo o octante positivo se tem $f'_{jx_i} < 0$, então dizemos que (1.23) representa um *sistema de competição.*

iii) Se para cada $j \neq i$ e em todo o octante positivo se tem $f'_{jx_i} > 0$, então dizemos que (1.23) representa um *sistema de cooperação.*

Naturalmente pode acontecer que o sistema de equações (1.23) não traduza nenhum dos três casos mencionados anteriormente podendo conter relações presa-predador entre algumas espécies e de competição e de cooperação entre algumas das outras espécies.

**A equação geral de Lotka-Volterra**

A equação autónoma geral de tipo Lotka-Volterra para $n$ populações é da forma

$$\dot{x}_i = x_i \left( r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.24}$$

Os $x_i$ denotam as densidades das espécies, os $r_i$ são as taxas de crescimento (ou de decrescimento) instrínsecas, e os $a_{ij}$ descrevem o efeito da $j$-ésima população sobre a $i$-ésima população, que é positivo, se incentiva o crescimento, ou negativo, se inibe o crescimento. Todos os tipos de interacção podem ser modelados desta maneira, se assumirmos que a influência de todas as espécies nas taxas de crescimento é linear e autónoma. A matriz $A = [a_{ij}]$ é chamada a *matriz de interacção.* Assim, o sistema (1.24) é de presa-predador, de competição ou de cooperação, consoante se tem, para todo $j \neq i$, (i) $a_{ji}a_{ij} \leq 0$; (ii) $a_{ji} > 0$; e (iii) $a_{ji} < 0$; respectivamente.

A simulação numérica mostra que, mesmo no caso de três populações, esta equação pode gerar um movimento caótico: o comportamento assimptótico das soluções consiste em oscilações muito irregulares e têm uma grande sensibilidade em relação às condições iniciais. O comportamento a longo prazo é imprevisível, como ilustra a Figura 1.4.

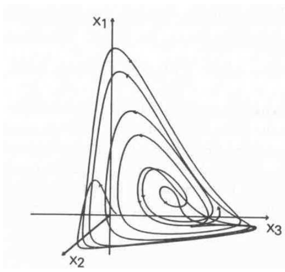


Figura 1.4: Representação das órbitas de (1.24) em $\mathbb{R}^3$.

Os pontos de equilíbrio de (1.24) em $int\mathbb{R}^n_+$ são as soluções das equações lineares

$$r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

cujas componentes sejam positivas. O próximo teorema relaciona a estabilidade de um equilíbrio interior positivo de (1.24) com a matriz de interacção $A$.

**Teorema 1.62.** *Considere-se (1.24) com $a_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq j$ e suponha--se que esta admite um equilíbrio interior $x^*$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Todas as órbitas em $\mathbb{R}^n_+$ são uniformemente limitadas quando $t \to +\infty$;*

2. *A matriz $-A$ é uma M-matriz não singular.*

3. *O equilíbrio $x^*$ é globalmente assimptoticamente estável.*

*Demonstração.* Ver e.g. em [15, pág.191]. □

Nos próximos capítulos o nosso objectivo será chegar a um resultado semelhante a este mas para equações de Lotka-Volterra de $n$ populações com atrasos discretos.

### 1.6.4 Equações de Lotka-Volterra com atrasos discretos

Nesta subsecção vamos introduzir modelos traduzidos por sistemas de EDF's retardadas. Estas equações têm sido usadas como modelos em diversas áreas da ciência tais como na dinâmica populacional, na modelação de redes neuronais ou na epidemiologia e o seu uso tem como objectivo tornar os modelos mais próximos da realidade biológica que tentam descrever. De facto a introdução de atrasos temporais nas equações diferenciais surge naturalmente nos modelos matemáticos em biologia de modo a incluir, por exemplo, os períodos de maturação das espécies, as transmissões sinápticas entre os neurónios ou o tempo de incubação em modelos epidemiológicos.

No capítulo 2 desta tese, estudamos o sistema para $n$ espécies de tipo Lotka-Volterra com atrasos discretos da forma:

$$\dot{y}_i = y_i \left( r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j (t - \tau_{ij}) \right), \quad i = 1, \ldots, n$$

O atraso tem um papel particularmente importante neste tipo de modelo em dinâmica populacional, na medida em que temos de ter em conta que a descendência tem de atingir uma certa maturidade antes de tomar parte no processo reprodutivo e no processo de obtenção de alimento.

Se considerarmos que este modelo traduz uma situação presa-predador, por exemplo entre a espécie $k$ (presa) e a espécie $j$ (predador), podemos intrepertar os atrasos nos termos $y_j(t-\tau_{kj})$, na $k$-ésima equação, e $y_k(t-\tau_{jk})$, na $j$-ésima equação, como um atraso de caça e como um atraso na maturação do predador, respectivamente.

No capítulo 3 analisaremos dois sistemas $n$-dimensionais de equações com atrasos. O primeiro deles modela uma rede neuronal consistindo em $n$ elementos com conexões arbitrárias da forma:

$$\dot{u}_i(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j (u_j (t - \tau_{ij})) + J_i$$

Os atrasos são não-negativos e aqui são interpretados como o tempo das transmissões sinápticas entre os neurónios, visto que estas transmissões não são instantâneas. A matriz $A = [a_{ij}]$ é chamada a *matriz de conexão* em que as entradas $a_{ij}$ podem ser números reais arbitrários, com números positivos a representarem conexões excitatórias e números negativos a representarem conexões inibitórias, as constantes $b_i$ são chamadas constantes de decrescimento RC e são positivas, as constantes $J_i$ representam os *inputs* neuronais e podem ser números reais arbitrários. Neste caso consideramos que a função de transferência $g$ é não linear.

O segundo é um sistema de Lotka-Volterra da forma

$$\dot{y}_i(t) = y_i(t)\left[r_i - b_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t-\tau_{ij})\right]$$

onde $r_i, b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\tau_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Aqui os atrasos podem ser interpretados como tempos de maturação da presa ou tempos de caça do predador.

# Capítulo 2

# Estabilidade de Sistemas de Lotka-Volterra com atrasos discretos

## 2.1 Introdução

Neste capítulo, o nosso objectivo é estudar a estabilidade assimptótica local e global de sistemas de Lotka-Volterra com atrasos discretos. Estes sistemas são muito importantes em estudos de dinâmica de populações. Para analisar a estabilidade local do sistema de equações não lineares de Lotka-Volterra em estudo faz-se a sua linearização. Na Secção 2.2 é feita a análise da estabilidade local da equação linearizada em torno de um equilíbrio positivo que se supõe, à partida, existir. Na Secção 2.3, prova-se a estabilidade assimptótica global do equilíbrio da equação não linear inicial. Este estudo baseia-se em [16].

Considere-se o seguinte sistema de equações de Lotka-Volterra:

$$\dot{y}_i = y_i \left( r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t - \tau_{ij}) \right), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

com

$$\tau_{ij} \geq 0 \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq n \text{ e } \tau_{ii} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

e suponha-se que existe um vector de coordenadas positivas $y^*$ com

$$r + Ay^* = 0, \tag{2.3}$$

onde $r = [r_1, \ldots, r_n]$ e $A = [a_{ij}]$. Este vector $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ é um equilíbrio para (2.1), i.e., $y(t) = y^*$ é uma solução (constante) de (2.1). Note-se que para (2.1) é assumido que os atrasos "diagonais" $\tau_{ii}$ são nulos.

O principal objectivo deste capítulo é mostrar que o equilíbrio $y^*$ de (2.1) é globalmente assimptoticamente estável se e só se a matriz $A$ verificar determinadas condições dadas no resultado central do capítulo, que será enunciado no início da secção 2.3.

Vamos começar por encontrar a linearização da equação (2.1) em torno do equilíbrio $y^*$. Para isso fazemos a mudança de variável $x(t) = y(t) - y^*$ em (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= (x_i + y_i^*)\left[r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}) + y_j^*)\right] \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_i^* a_{ij} x_j(t-\tau_{ij})}_{\text{termo linear}} + \underbrace{x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t-\tau_{ij})}_{\text{termo não linear}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

A linearização de (2.1) em torno do equilíbrio $y^*$ é então:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} y^* a_{ij} x_j(t-\tau_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.5}$$

## 2.2 Estabilidade Assimptótica Local

O objectivo desta secção é encontrar condições sobre a matriz $A$ para que a solução trivial de (2.5) seja assimptoticamente estável, para qualquer escolha de atrasos satisfazendo (2.2).

Para isso, de modo a simplificar a notação, escreva-se a equação linear (2.5) na forma

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j(t-\tau_{ij}), \quad \text{para } i = 1, \ldots, n, \tag{2.6}$$

com $\tau_{ij}$ satisfazendo (2.2) e em que notamos por $B$ a matriz cuja entrada $ij$ é dada por $b_{ij} = y_i^* a_{ij}$, para $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

O principal resultado desta secção é:

**Teorema 2.1.** *A equação (2.5) é assimptoticamente estável para todas as escolhas de atrasos da forma (2.2) se e só se* $a_{ii} < 0$ *para* $i = 1, \dots, n$, $detA \neq 0$ *e* $A$ *é fracamente diagonalmente dominante.*

No que se segue notaremos por $-\tilde{A}$ a matriz definida por

$$\tilde{a_{ij}} = \begin{cases} a_{ii}, & i = j \\ |a_{ij}|, & i \neq j \end{cases}$$

**Observação 2.2.** *Notemos que as condições impostas no Teorema 2.1 são válidas para a matriz* $A$ *se e só se são válidas para a matriz* $B$. *Com efeito, visto que por hipótese* $y_i^* > 0$ *para* $i = 1, \dots, n$, *temos*

- $a_{ii} < 0 \Leftrightarrow b_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- $\det A = (y_1^*)^{-1} \dots (y_n^*)^{-1} \det B$, *logo* $\det A \neq 0$ *se e só se* $\det B \neq 0$.
- *os menores principais de* $-\tilde{A}$ *de ordem* $i$, $i = 1, \dots, n$, *que notamos* $\det(-\tilde{A}_i)$, *escrevem-se como*

  $$\det(-\tilde{A}_i) = (y_1^*)^{-1} \dots (y_i^*)^{-1} \det(-\tilde{B}_i)$$

  *logo, para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$, $\det(-\tilde{A}_i) \geq 0$ *se e só se* $\det(-\tilde{B}_i) \geq 0$, *pelo que se conclui que* $A$ *é fracamente diagonalmente dominante se e só se* $B$ *o é.*

Assim, tendo em conta a observação anterior, provaremos o Teorema 2.1 estabelecendo as condições necessárias e suficientes para a matriz $B$, em vez de para a matriz $A$.

Como se viu na secção 1.2.1, a equação característica de uma EDFR linear do tipo

$$\dot{x} = L(x_t), \tag{2.7}$$

onde $L(\phi) = (L_1(\phi), \dots, L_n(\phi))$ e $L_i : C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um operador linear limitado, $i = 1, \dots, n$, $\phi \in C$, escreve-se como

$$det\left(\lambda I - L\left(e^{\lambda \cdot} I\right)\right) = 0, \tag{2.8}$$

onde

$$h = \max_{1 \leq i,j \leq n} \tau_{ij} \text{ e } L\left(e^{\lambda \cdot} I\right) = \left[\begin{array}{ccc} L\left(e^{\lambda \cdot} e_1\right) & \dots & L\left(e^{\lambda \cdot} e_n\right) \end{array}\right] = \left[L_i\left(e^{\lambda \cdot} e_k\right)\right]_{i,k}$$

em que os $e_k$, $k = 1, \ldots, n$, representam os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$. A equação (2.6) tem a forma (2.7) com cada componente $i$ do operador linear $L$ dada por $L_i(\phi) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\phi_j(-\tau_{ij})$, para $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$. A entrada $ik$ de $L\left(e^{\lambda \cdot} I\right)$ é

$$\begin{aligned} L_i\left(e^{\lambda \cdot} e_k\right) &= b_{ik}e^{-\tau_{ik}} \quad \text{se } i \neq k, \\ L_k\left(e^{\lambda \cdot} e_k\right) &= b_{kk} \quad \text{se } i = k. \end{aligned}$$

Assim, a equação (2.8) é dada por

$$\underbrace{\det \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12}e^{-\lambda\tau_{12}} & \ldots & b_{1n}e^{-\lambda\tau_{1n}} \\ b_{21}e^{-\lambda\tau_{21}} & b_{22} - \lambda & \ldots & b_{2n}e^{-\lambda\tau_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}e^{-\lambda\tau_{n1}} & b_{n2}e^{-\lambda\tau_{n2}} & \ldots & b_{nn} - \lambda \end{bmatrix}}_{\Delta(B)(\lambda,\tau)} = 0, \tag{2.9}$$

em que denotamos por $\Delta(B)(\lambda, \tau)$ a matriz de entrada $ij$ igual a $(b_{ij} - \lambda\delta_{ij})e^{-\lambda\tau_{ij}}$ e $\tau = [\tau_{ij}]$.

Por resultados de estabilidade de EDFR's lineares já abordados no capítulo anterior sabemos que $x(t) = ce^{\lambda t}$ é uma solução de (2.6) para algum $c \neq 0$ se e só se $\lambda$ satisfaz (2.9). Além disso, a solução $x = 0$ de (2.6) é assimptoticamente estável se e só se todas as raízes de (2.9) têm parte real negativa.

Para provar o Teorema 2.1 serão estabelecidos alguns resultados auxiliares.

**Lema 2.3.** *Se $B$ é fracamente diagonalmente dominante, então todas as raízes de (2.9) têm parte real negativa, com a possível excepção de $\lambda = 0$.*

*Demonstração.* Vamos primeiro considerar o caso em que $B$ é uma matriz **irredutível**.

Comecemos por observar que se $B$ é fracamente diagonalmente dominante e irredutível, a matriz $-\tilde{B}$ é uma M-matriz irredutível. Assim segundo o Teorema 1.58 se a matriz $-\tilde{B}$ é uma M-matriz irredutível, então existe um vector $c > 0$ ($c \in \mathbb{R}^n$) tal que: $-\tilde{B}c \geq 0$, ou seja, $\tilde{B}c \leq 0$, o que implica que existem $c_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, tais que $\sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_{ij}c_j \leq 0$, ou seja,

$$b_{ii}c_i + \sum_{j \neq i}^{n} |b_{ij}|c_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Suponha-se, com vista a um absurdo, que para algum conjunto de atrasos $\tau_{ij}$ satisfazendo (2.2), existe uma raiz $\lambda$ de (2.6) com $Re\lambda \geq 0$. Considerando a matriz $Q = [q_{ij}]$, onde $q_{ij} = b_{ij}e^{-\lambda\tau_{ij}}$, tem-se que $\lambda$ é um valor próprio de $Q$. Observemos que $q_{ii} = b_{ii} \leq 0$ e $|q_{ij}| = |b_{ij}|e^{-Re\lambda\tau_{ij}} \leq |b_{ij}|$ porque $Re(\lambda) \geq 0$. Assim, (2.10) implica

$$q_{ii}c_i + \sum_{j \neq i}^{n} |q_{ij}|c_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Consideremos agora a matriz $\hat{Q} = [c_i^{-1}q_{ij}c_j]$ semelhante a $Q$. Multiplicando cada desigualdade em (2.11) por $c_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$, e aplicando o Teorema de Gershgörin à matriz $\hat{Q}$, concluímos que o valor próprio $\lambda$ de $\hat{Q}$ está contido num círculo com centro $c_i^{-1}q_{ii}c_i \leq 0$ e raio quanto muito igual a $\sum_{j \neq i} c_i^{-1}|q_{ij}|c_j \leq |q_{ii}|$ (para algum $i$). Assim temos $Re\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$, o que vai contra a hipótese de que partimos.

Suponha-se agora que $B$ é uma matriz **redutível**. Neste caso, sabemos que existe uma matriz de permutação $P$ tal que:

$$P^T BP = K = \begin{bmatrix} K_{11} & \ldots & K_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & K_{mm} \end{bmatrix},$$

onde os blocos diagonais $K_{jj}$, $j = 1, \ldots, m$ são irredutíveis ou zero e a soma das dimensões dos blocos diagonais $K_{jj}$, $j = 1, \ldots, n$ é igual a $n$.

O nosso objectivo é aplicar o que foi anteriormente provado para matrizes irredutíveis aos blocos diagonais de $K$. Para isso, vejamos que os blocos diagonais são fracamente diagonalmente dominantes. Vamos fazê-lo utilizando a caracterização alternativa de matriz fracamente diagonalmente dominante dada no Teorema 1.52 que afirma que uma matriz $A$ é fracamente diagonalmente dominante se todo o valor próprio de $-\tilde{A}$ tem parte real não negativa, ou seja, $Re(-\tilde{A}) \geq 0$.

Visto que as matrizes $B$ e $K$ são semelhantes, as matrizes $-\tilde{B}$ e $-\tilde{K}$ também o são, donde têm os mesmos valores próprios. Por outro lado, $\lambda$ é valor próprio de $K$ se e só se existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\lambda$ é valor próprio de $K_{ii}$. Logo, $Re(-\tilde{K}_{ii}) \geq 0$, para $i = 1, \ldots, m$.

Como a equação (2.9) é equivalente à equação

$$det\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta(K_{11})(\lambda,\tau) & \dots & \Delta(K_{1m})(\lambda,\tau) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \Delta(K_{mm})(\lambda,\tau) \end{bmatrix}}_{\Delta(K)(\lambda,\tau)} = 0, \qquad (2.12)$$

tem-se

$$\begin{aligned} det\Delta(K)(\lambda,\tau) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \prod_{j=1}^{m} det\Delta(K_{jj})(\lambda,\tau) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists j \in \{1,\dots,m\} : det(\Delta(K_{jj})(\lambda,\tau)) = 0. \end{aligned}$$

Como $K_{jj}$ é irredutível para qualquer $j \in \{1,\dots,m\}$, pelo resultado anterior para matrizes irredutíveis, as raízes não nulas de (2.9) têm parte real negativa, o que conclui a demonstração. □

**Lema 2.4.** *Se* $\det B \neq 0$ *e* $B$ *é fracamente diagonalmente dominante, então a equação (2.6) é assimptoticamente estável para todas as escolhas de atrasos da forma (2.2).*

*Demonstração.* Pelo Lema 2.3 concluímos que as raízes de (2.9) têm sempre parte real negativa a não ser que sejam zero. Por outro lado, $\Delta(B)(0,\tau) = B$, logo a solução $\lambda = 0$ de (2.9) é possível só se $\det B = 0$, portanto esta hipótese fica excluída. Assim, (2.6) é assimptoticamente estável. □

Antes de continuarmos, relembramos um importante resultado da Análise Complexa, o Teorema de Rouché, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

**Teorema 2.5.** (Rouché) *Sejam* $f$ *e* $g$ *funções analíticas num domínio* $\Omega$ *simplesmente conexo e* $\gamma$ *uma curva de Jordan contida em* $\Omega$*, onde*

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad z \in \gamma.$$

*Então as funções* $f$ *e* $f+g$ *têm o mesmo número de zeros no interior de* $\gamma$.

**Lema 2.6.** *Se* $b_{ii} < 0$ *para qualquer* $i = 1,\dots,n$ *e* $det(-\tilde{B}) < 0$*, então existem atrasos* $\tau_{ij}$ *satisfazendo (2.2), tais que a equação (2.9) tem uma solução* $\lambda$ *com* $Re\lambda > 0$.

*Demonstração.* Consideremos a função

$$F_\epsilon(z) = det \begin{bmatrix} b_{11} - z\epsilon & b_{12}e^{-z\eta_{12}} & \dots & b_{1n}e^{-z\eta_{1n}} \\ b_{21}e^{-z\eta_{21}} & b_{22} - z\epsilon & \dots & b_{2n}e^{-z\eta_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}e^{-z\eta_{n1}} & b_{n2}e^{-z\eta_{n2}} & \dots & b_{nn} - z\epsilon \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

onde,

$$\eta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{para } b_{ij} < 0 \\ 1, & \text{para } b_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Para $z = x + 2\pi i$, onde $x$ é real, vamos calcular $F_0(z)$. Para isso observemos que:

$$\begin{aligned} b_{ij}e^{-z\eta_{ij}} &= b_{ij}e^{-(x+2\pi i)\eta_{ij}} \\ &= b_{ij}e^{-x\eta_{ij}}e^{-2\pi i\eta_{ij}} \\ &= \begin{cases} -|b_{ij}|e^{-x\eta_{ij}}(-1) & \text{se } b_{ij} < 0 \\ b_{ij}e^{-x\eta_{ij}}.1 & \text{se } b_{ij} \geq 0 \end{cases} \\ &= |b_{ij}|e^{-x\eta_{ij}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$D(x) := F_0(x + 2\pi i) = det \begin{bmatrix} b_{11} & |b_{12}|e^{-x\eta_{12}} & \dots & |b_{1n}|e^{-x\eta_{1n}} \\ |b_{21}|e^{-x\eta_{21}} & b_{22} & \dots & |b_{2n}|e^{-x\eta_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |b_{n1}|e^{-x\eta_{n1}} & |b_{n2}|e^{-x\eta_{n2}} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Em particular, tem-se $F_0(0) = D(0) = \det \tilde{B}$.

Consideremos então a função real de variável real $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = (-1)^n D(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Calculemos o valor desta função no ponto $x = 0$ e em $\infty$:

$$\begin{aligned} G(0) &= (-1)^n D(0) = (-1)^n \det \tilde{B} = \det(-\tilde{B}) < 0, \\ G(\infty) &= (-1)^n D(\infty) = (-1)^n \lim_{x \to \infty} D(x) \\ &= (-1)^n det \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n b_{11} \dots b_{nn} = |b_{11}| \dots |b_{nn}| > 0. \end{aligned}$$

Visto que temos $G(0) < 0$ e $G(\infty) > 0$, pelo Teorema do Valor Intermédio, podemos concluir que existe $\hat{x} \in \mathbb{R}^+$ tal que $G(\hat{x}) = 0$, pelo que $\hat{z} = \hat{x} + 2\pi i$ é um zero de $F_0$.

Utilizando o Teorema de Rouché, provaremos de seguida que $F_\epsilon$ tem um zero $\hat{z}(\epsilon)$ perto de $\hat{z}$, para $\epsilon > 0$ pequeno.

Observemos que $F_\epsilon$ é dada por,

$$F_\epsilon(z) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma_i} \quad \text{onde} \quad c_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - z\epsilon, & \text{se } i = j \\ b_{ij} e^{-z\eta_{ij}}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde $S_n$ representa o grupo das permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Consideremos as funções analíticas $F_0, F_\epsilon : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Já sabemos que $\hat{z} = \hat{x} + 2\pi i$ é um zero de $F_0$. Como $F_0$ é uma função analítica (não constante) o zero $\hat{z}$ é isolado. Assim é possível encontrar uma curva de Jordan $\gamma$ em que $\hat{z}$ é o único zero de $F_0(z)$ em $\gamma \cup int(\gamma)$. Como $F_\epsilon(z) \to F_0(z)$ quando $\epsilon \to 0^+$ uniformemente em $\gamma$, para $\epsilon > 0$ pequeno tem-se

$$\max_{z \in \gamma} |g_\epsilon(z)| < \min_{z \in \gamma} |F_0(z)|$$

onde $g_\epsilon(z) = F_\epsilon(z) - F_0(z)$. Logo, pelo Teorema de Rouché $F_\epsilon$ e $F_0$ têm o mesmo número de zeros no interior de $\gamma$, o que implica que $F_\epsilon$ tem um zero $\hat{z}(\epsilon)$ perto de $\hat{z}$, para $\epsilon$ pequeno.

Faça-se $\eta_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Claramente $\tau_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{\epsilon}$ satisfazem (2.2) e para $\lambda = \epsilon\hat{z}(\epsilon)$ tem-se que $\lambda$ é uma raiz de (2.9) com $Re\lambda > 0$ para $\epsilon$ pequeno, o que termina a demonstração. $\square$

**Lema 2.7.** *Seja $f(\lambda)$ um polinómio real de grau $n$ com $n$ zeros reais, incluindo zero. Então a equação*

$$f(\lambda) = e^{-\lambda\nu} \tag{2.14}$$

*tem uma solução $\lambda$ com $Re\lambda > 0$ para algum $\nu > 0$.*

*Demonstração.* Escreva-se $f(\lambda)$ como

$$f(\lambda) = \alpha \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i),$$

onde, $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 = 0$.

**i)** Começamos por mostrar que (2.14) tem uma raiz imaginária pura $\lambda = i\omega$, onde $\omega > 0$, para algum $\nu > 0$.
Seja $\omega > 0$. Se $f(i\omega) = e^{-i\omega\nu}$ tem-se $|f(i\omega)| = |e^{-i\omega\nu}| = 1$; reciprocamente, se $|f(i\omega)| = 1$ então o número $z = f(i\omega)$ tem a forma $z = e^{i\theta}$ para algum ângulo $\theta$. Escolhendo, $\nu = \frac{|\theta|}{\omega}$, temos $f(i\omega) = e^{-i\frac{|\theta|}{\omega}\omega} = e^{-i\omega\nu}$. Acabámos de mostrar que, escolhendo convenientemente $\nu > 0$, se tem

$$f(i\omega) = e^{-i\omega\nu} \quad \text{se e só se } |f(i\omega)| = 1. \tag{2.15}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ \lim_{\omega \to +\infty} |f(i\omega)| &= \lim_{\omega \to +\infty} \left( |\alpha| \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_i^2 + \omega^2} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $\hat{\omega} > 0$ tal que $|f(i\hat{\omega})| = 1$. Por (2.15), isto mostra que, para $\nu = \hat{\nu} > 0$ convenientemente escolhido, $\hat{\lambda} = i\hat{\omega}$ é raiz de (2.14).

**ii)** Sejam $\lambda$ e $\hat{\lambda} = i\hat{\omega}$, com $\hat{\omega} > 0$, duas raízes da equação (2.14), para $\nu$ e $\hat{\nu} \geq 0$ respectivamente, onde $\hat{\lambda}$ é a raiz imaginária pura cuja existência se provou na parte **i)**. Vamos mostrar que para $\nu$ perto de $\hat{\nu}$, a solução $\lambda$ cruza o eixo imaginário. Considere-se a função $g(\lambda, \nu) = f(\lambda) - e^{-\lambda\nu}$ e calcule-se a sua derivada em ordem a $\lambda$ no ponto $(\hat{\lambda}, \hat{\nu})$. Para $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, tem-se

$$g_\lambda(\lambda, \nu) = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda}(e^{-\lambda\nu}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)} + \nu e^{-\lambda\nu}$$

pelo que

$$g_\lambda(\hat{\lambda}, \hat{\nu}) = e^{-\hat{\lambda}\hat{\nu}} \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\hat{\lambda} - \lambda_i)} + \hat{\nu} \right] = e^{-\hat{\lambda}\hat{\nu}}(z + \hat{\nu}) \quad \text{com } z = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\hat{\lambda} - \lambda_i)} \in \mathbb{C},$$

e

$$z = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\hat{\lambda} - \lambda_j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(i\hat{\omega} - \lambda_j)}.$$

Logo,

$$Im(z) = -\hat{\omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\hat{\omega}^2 + \lambda_j^2} < 0.$$

Em particular, tem-se

$$g_\lambda(\hat{\lambda}, \hat{\nu}) \neq 0.$$

Aplicando o Teorema das Funções Implícitas a (2.14), $\lambda$ escreve-se como função implícita de $\nu$ numa vizinhança de $(\hat{\lambda}, \hat{\nu})$, com $\lambda(\hat{\nu}) = \hat{\lambda}$ e $\frac{d\lambda}{d\nu}(\hat{\nu}) = -\frac{g_\nu(\hat{\lambda},\hat{\nu})}{g_\lambda(\hat{\lambda},\hat{\nu})}$. Assim, $\lambda(\nu)$ escreve-se como

$$\begin{aligned} \lambda(\nu) &= \lambda(\hat{\nu}) + \frac{d\lambda}{d\nu}(\hat{\nu})(\nu - \hat{\nu}) + O((\nu - \hat{\nu})^2) \\ &= \hat{\lambda} + c(\nu - \hat{\nu}) + O((\nu - \hat{\nu})^2) \end{aligned}$$

onde $c = -\frac{g_\nu(\hat{\lambda},\hat{\nu})}{g_\lambda(\hat{\lambda},\hat{\nu})}$.
De seguida verificamos que $Re(c) > 0$ pelo que $Re\lambda(\nu) > 0$ para $\nu > \hat{\nu}$ perto de $\hat{\nu}$, o que termina a demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} c &= -\frac{g_\nu(\hat{\lambda}, \hat{\nu})}{g_\lambda(\hat{\lambda}, \hat{\nu})} = -\frac{\hat{\lambda} e^{-\hat{\lambda}\hat{\nu}}}{e^{-\hat{\lambda}\hat{\nu}}[z + \hat{\nu}]} = -\frac{\hat{\lambda}}{Rez + iImz + \hat{\nu}} \\ &= -\frac{i\hat{\omega}(Rez + \hat{\nu} - iImz)}{(Rez + \hat{\nu})^2 + Imz^2} \Rightarrow \\ Re(c) &= -\frac{\hat{\omega} Imz}{(Rez + \hat{\nu})^2 + Imz^2} > 0. \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 2.8.** *Se $b_{ii} = 0$ para algum $i$ e $\det B \neq 0$, então existem atrasos $\tau_{ij}$ satisfazendo (2.2) tais que (2.9) tem uma raiz $\lambda$ com $Re\lambda > 0$.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponha-se que $b_{11} = 0$. Escreva-se $\det B$ na forma

$$\det B = \sum_{\mu \in S_n} sgn(\mu) \prod_{i=1}^{n} b_{i\mu(i)}$$

Por hipótese, $\det B \neq 0$, pelo que existe pelo menos uma permutação $\sigma$ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que o termo $\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}$ é não nulo. Observando de novo a equação característica (2.9), seja $\Delta(B)(\lambda, \tau) := [c_{ij}]$. A expansão de $\det \Delta(B)(\lambda, \tau)$ é

$$\begin{aligned}
\det \Delta(B)(\lambda, \tau) &= \prod_{i=1}^{n} c_{ii} + sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)} + \sum_{\mu \in S_n, \mu \neq \sigma, Id} sgn(\mu) \prod_{i=1}^{n} c_{i\mu(i)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (b_{ii} - \lambda) + sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (b_{i\sigma(i)} - \lambda \delta_{i\sigma(i)}) e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_{i\sigma(i)}} + \\
&\quad + \sum_{\mu \in S_n, \mu \neq \sigma} sgn(\mu) \prod_{i=1}^{n} c_{i\mu(i)},
\end{aligned}$$

onde a segunda parcela é o termo não nulo correspondente à permutação $\sigma$ na expansão de $\det \Delta(B)(\lambda, \tau)$ e onde $Id \in S_n$ designa a permutação identidade. Truncando a terceira parcela (correspondente a $n! - 2$ permutações), considere-se a equação

$$\prod_{i=1}^{n} (b_{ii} - \lambda) + sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (b_{i\sigma(i)} - \lambda \delta_{i\sigma(i)}) e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_{i\sigma(i)}} = 0. \tag{2.16}$$

Note-se que $\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} \neq 0$, pelo que, em particular $\sigma(1) \neq 1$, já que, por hipótese $b_{11} = 0$. Para a permutação $\sigma$ fixada, defina-se o conjunto $\Omega = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \sigma(i) = i\}$. A equação (2.16) é dada por

$$\prod_{i=1}^{n} (b_{ii} - \lambda) + sgn(\sigma) \prod_{i \in \Omega} (b_{ii} - \lambda) \prod_{i \notin \Omega} b_{i\sigma(i)} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_{i\sigma(i)}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\prod_{i \in \Omega} (b_{ii} - \lambda) \left[ \prod_{i \notin \Omega} (b_{ii} - \lambda) + sgn(\sigma) \prod_{i \notin \Omega} b_{i\sigma(i)} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_{i\sigma(i)}} \right] = 0$$

Para $\lambda \neq b_{ii}$, $i \in \Omega$, a equação (2.16) tem a forma

$$f(\lambda) = e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_{i\sigma(i)}},$$

onde $f(\lambda) = -\left[sgn(\sigma) \prod_{i \notin \Omega} b_{i\sigma(i)}\right]^{-1} \prod_{i \notin \Omega} (b_{ii} - \lambda)$. Note-se que $f$ é um polinómio de grau $p = n - \#\Omega \leq n$ com $p$ raízes reais incluindo zero. Estamos nas condições do Lema 2.7, pelo que concluímos que existe uma raiz, $\hat{\lambda}$, de (2.16) com $Re\hat{\lambda} > 0$, para algum $\nu = \sum_{i=1}^{n} \tau_{i\sigma(i)}$ conveniente e tão grande quanto se queira.
Consideremos então as funções $\det \Delta(B)(\lambda, \tau)$ e $G_\tau(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (b_{ii} - \lambda) + sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (b_{i\sigma(i)} - \lambda \delta_{i\sigma(i)}) e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} \tau_{i\sigma(i)}}$. Como $G_\tau(\lambda)$ é uma função analítica não constante o seu zero $\hat{\lambda}$ é isolado, logo é possível encontrar uma curva de

Jordan $\gamma$ tal que $\hat{\lambda}$ é o único zero de $G_\tau(\lambda)$ em $\gamma \cup int(\gamma)$ e tal que, para $\tau_{ij}$ suficientemente grandes, se tem

$$\max_{\lambda\in\gamma} |g_\tau(\lambda)| < \min_{\lambda\in\gamma} |G_\tau(\lambda)|,$$

onde $g_\tau(\lambda) = \det \Delta(B)(\lambda, \tau) - G_\tau(\lambda)$. Logo $|g_\tau(z)| < |G_\tau(z)|, \forall z \in \gamma$, e pelo Teorema de Rouché as funções $\det \Delta(B)(\lambda, \tau)$ e $G_\tau(\lambda)$ têm o mesmo número de zeros no interior de $\gamma$, o que implica que (2.9) tem uma raiz $\lambda$, perto de $\hat{\lambda}$ para $\tau_{ij}$ grande; logo $Re(\lambda) > 0$, o que termina a demonstração. $\square$

**Lema 2.9.** *Se (2.6) é assimptoticamente estável para todas as escolhas de atrasos da forma (2.2) então $b_{ii} < 0$ para $i = 1, \ldots, n$, $detB \neq 0$ e $B$ é fracamente diagonalmente dominante.*

*Demonstração.* Tem-se $B = \Delta(B)(0, \tau)$. Se $\det B = 0$, então $\lambda = 0$ seria solução de (2.9), o que não é possível já que (2.6) é assimptoticamente estável, logo todas as raízes características de (2.9) têm parte real negativa. Assim, $\det B \neq 0$.

Suponhamos agora, com vista a um absurdo, que $\exists k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b_{kk} > 0$. Observemos que quando $\tau_{ij} \to +\infty$, $\Delta(B)(\lambda, \tau) \to diag(b_{11} - \lambda, \ldots, b_{nn} - \lambda) := M(\lambda)$.

Se $b_{kk} > 0$, a equação $\det M(\lambda) = 0$ tem uma raiz $\hat{\lambda} = b_{kk} > 0$. Consideremos então as funções $\det \Delta(B)(\lambda, \tau)$ e $\det M(\lambda)$. Como $\det M(\lambda)$ é uma função analítica não constante o seu zero $\hat{\lambda} = b_{kk}$ é isolado. Aplicando novamente o Teorema de Rouché tem-se que as funções $\det \Delta(B)(\lambda, \tau)$ e $\det M(\lambda)$ têm o mesmo número de zeros no interior de $\gamma$, o que implica que (2.9) tem uma raiz $\lambda$ perto de $\hat{\lambda} = b_{kk}$ para $\tau_{ij}$ grande; logo $Re\lambda > 0$, o que contradiz a hipótese de (2.6) ser assimptoticamente estável.

Excluída a hipótese de existir $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b_{kk} > 0$, vamos agora mostrar que também não podemos ter $b_{kk} = 0$ para algum $k$. Suponhamos então que $\exists k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b_{kk} = 0$. Como $\det B \neq 0$, o Lema 2.8 permite concluir que, nestas condições, existiria uma raiz $\lambda$ de (2.9) com $Re\lambda > 0$, o que contradiz novamente a hipótese de (2.6) ser assimptoticamente estável. Assim, $b_{ii} < 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Para provar que $B$ é fracamente diagonalmente dominante, suponha-se por absurdo que algum dos menores principais de $-\tilde{B}$ é negativo. Sem perda de generalidade, podemos escolher $k \in \{1, \ldots, n\}$ e considerar a submatriz principal de $-\tilde{B}$ de ordem $k$, que vamos notar por $-\tilde{B}_k$, $B_k = [b_{ij}]_{1\leq i,j\leq k}$,

com $\det(-\tilde{B}_k) < 0$. Aplicando o Lema 2.6 a esta submatriz principal, concluímos que existem $\hat{\tau}_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ satisfazendo (2.2) tais que existe uma raiz $\hat{\lambda}$, com $Re(\hat{\lambda}) > 0$, da equação característica (2.9) correspondente a $B_k$.
Observemos que, quando $\tau_{ij} \to +\infty$ para $i > k$ ou $j > k$, a matriz $\Delta(B)(\lambda, \tau)$ da equação característica (2.9) tende para a seguinte matriz:

$$D(\lambda,\tau) := \begin{bmatrix} b_{11}-\lambda & \ldots & b_{1k}e^{-\lambda\tau_{1k}} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}e^{-\lambda\tau_{k1}} & \ldots & b_{kk}-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & b_{k+1k+1}-\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & b_{nn}-\lambda \end{bmatrix},$$

tendo-se $\det D(\lambda, \tau) = \det \Delta(B_k)(\lambda, \tau) \prod_{i=k+1}^{n}(b_{ii} - \lambda)$. Consideremos então as funções $\det \Delta(B)(\lambda, \tau)$ e $\det D(\lambda, \tau)$. Tem-se $\det D(\hat{\lambda}, \tau) = 0$.

Como $\det D(\lambda, \tau)$ é uma função analítica não constante, $\hat{\lambda}$ é um zero isolado de $\det D(\lambda, \tau)$ e, usando um argumento de aplicação do Teorema de Rouché semelhante aos usados anteriormente, chegamos à conclusão de que a equação característica (2.9) tem uma raiz $\lambda$ perto de $\hat{\lambda}$, consequentemente com $Re(\lambda) > 0$, o que contradiz a hipótese de (2.6) ser assimptoticamente estável.

Assim provámos que $B$ tem de ser fracamente diagonalmente dominante, o que conclui a demonstração. □

*Demonstração. (do Teorema 2.1)* Os Lemas 2.9 e 2.3 dão as condições necessária e suficiente, respectivamente, do Teorema 2.1 com $A$ substituída por $B$. Da Observação 2.2 segue o teorema. □

## 2.3 Estabilidade Assimptótica Global

O objectivo desta secção é provar o teorema enunciado de seguida, que dá condições necessárias e suficientes sobre a matriz $A$ para que o equilíbrio $y^*$ de (2.1) seja globalmente assimptoticamente estável para todos os valores de atrasos $\tau_{ij}$ satisfazendo (2.2).

**Teorema 2.10.** *Suponhamos que existe um vector de coordenadas positivas $y^*$ satisfazendo (2.3). Então $y^*$ é globalmente assimptoticamente estável para (2.1) no conjunto de soluções positivas para todos os atrasos $\tau_{ij}$ satisfazendo*

*(2.2) se e só se* $a_{ii} < 0$ *para* $i = 1, \ldots, n$, $\det A \neq 0$ *e* $A$ *é fracamente diagonalmente dominante.*

Note-se que este resultado é extremamente forte por dar condições necessárias e suficientes para a estabilidade assimptótica global de $y^*$ independentemente dos atrasos. À semelhança do que acontece em EDO's essa estabilidade é dada apenas através da análise da matriz $A$.

Primeiramente, apresenta-se um lema, que dá a condição necessária do Teorema 2.10. Depois apresenta-se um conjunto de resultados auxiliares para a prova da condição suficiente. Para isso, trata-se separadamente as situações de matrizes irredutíveis e de matrizes redutíveis.

Começamos por fazer uma observação em relação à demonstração do Lema 2.9, relembrando que $B = [y_i^* a_{ij}]$.

**Observação 2.11.** *Sob a hipótese* $\det B \neq 0$*, a equação característica (2.9) tem uma raiz com parte real positiva (para uma certa escolha de* $\tau_{ij}$ *satisfazendo (2.2)), desde que se tenha* $b_{ii} \geq 0$ *para algum* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *ou* $B$ *não seja fracamente diagonalmente dominante.*

**Lema 2.12.** *Suponhamos que existe um vector com coordenadas positivas* $y^*$ *satisfazendo (2.3). Se* $y^*$ *é globalmente assimptoticamente estável para (2.1) (para soluções com condições iniciais* $y_i(0) > 0$*) para todos os atrasos* $\tau_{ij}$ *satisfazendo (2.2) então* $a_{ii} < 0$ *para* $i = 1, \ldots, n$, $\det A \neq 0$ *e* $A$ *é fracamente diagonalmente dominante.*

*Demonstração.* Comecemos por observar que $\det A \neq 0$ pois, caso contrário, a equação (2.1) teria infinitas soluções de equilíbrio perto de $y^*$ e este não seria um equilíbrio assimptoticamente estável, contrariando a hipótese. Daqui concluímos ainda que $\det B \neq 0$, pela Observação 2.2.

Vamos agora provar que nenhuma das raízes de (2.9) tem parte real positiva. Suponhamos que existe $\lambda$ satisfazendo (2.9), tal que $Re\lambda > 0$. Pelo Teorema 1.36, a solução nula da equação (2.4) é instável o que implica que $y^*$ é um equilíbrio instável contrariando novamente a hipótese.

Como já provámos que $\det B \neq 0$ e que não existem raízes características de (2.9) com parte real positiva, por contra-recíproco da Observação 2.11 concluímos finalmente que $b_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ e que $B$ é fracamente diagonalmente dominante. Pela Observação 2.2, resulta que $\det A \neq 0$, $a_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ e que $A$ é fracamente diagonalmente dominante, como queríamos. □

Tal como no início deste capítulo vamos notar $x(t) = y(t) - y^*$ para reescrever a equação (2.1) na forma

$$\dot{y}_i(t) = y_i(t) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \tag{2.17}$$

cujo equilíbrio é $y^*$.

Defina-se o conjunto $G = C([-h, 0]; \mathbb{R}^n_+)$, onde $h = \max_{i,j} \tau_{ij}$, e o seguinte funcional $V : G \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde a escolha das constantes $\alpha_i > 0$ e $\beta_{ij} > 0$ será efectuada mais à frente:

$$V(y(.), t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i(t) - y_i^* \log y_i(t)) + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \int_{t-\tau_{ij}}^{t} (y_j(s) - y_j^*)^2 ds. \tag{2.18}$$

**Lema 2.13.** *Se $A$ é uma matriz irredutível e fracamente diagonalmente dominante, então existem constantes $\alpha_i, \beta_{ij} > 0$ tais que o funcional (2.18) definido acima é um funcional de Liapunov em $G$.*

*Demonstração.* Para que (2.18) seja um funcional de Liapunov para a equação (2.1), temos de mostrar que $\dot{V} \leq 0$ ao longo das soluções de (2.1). Para calcular a derivada de $V$ ao longo da solução $y(t)$ de (2.1) escreve-se (2.18) denotando $y(t) - y^*$ por $x(t)$:

$$V(y(.), t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i(t) - y_i^* \log y_i(t)) + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \int_{t-\tau_{ij}}^{t} x_j(s)^2 ds$$

Derivando em ordem a $t$, tem-se por (2.17)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(y(.), t) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dot{y}_i(t) \left(1 - \frac{y_i^*}{y_i(t)}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \left[x_j^2(t) - x_j^2(t - \tau_{ij})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left( y_i(t) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \right) \left(1 - \frac{y_i^*}{y_i(t)}\right) + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \left[x_j^2(t) - x_j^2(t - \tau_{ij})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) [y_i(t) - y_i^*] + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \left[x_j^2(t) - x_j^2(t - \tau_{ij})\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i x_i(t) a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \left[x_j^2(t) - x_j^2(t - \tau_{ij})\right] \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Sendo $A$ uma matriz irredutível fracamente diagonalmente dominante, pelo Teorema 1.58, existem $c_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ tais que

$$a_{ii}c_i + \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|c_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Além disso, $A$ é fracamente diagonalmente dominante se e só se $A^T$ também o é, pois as matrizes $-\tilde{A}$ e $-\tilde{A^T} = -\tilde{A}^T$ têm os mesmos valores próprios. Portanto, também podemos dizer que existem $d_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ tais que:

$$d_{ii}a_{ii} + \sum_{j\neq i} d_j|a_{ji}| \leq 0 \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.21}$$

Escolhendo $\alpha_i = 2\frac{d_i}{c_i}$ e $\beta_{ij} = \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|$ e substituindo em (2.19), obtém-se

$$\dot{V} = \sum_{i,j=1}^{n} 2\frac{d_i}{c_i}x_i(t)a_{ij}x_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}| \left[x_j^2(t) - x_j^2(t-\tau_{ij})\right],$$

e visto que a parcela $\left[x_j^2(t) - x_j^2(t-\tau_{ij})\right]$ se anula sempre que $i = j$ pois $\tau_{ii} = 0$ por hipótese, (2.19) fica na forma

$$\dot{V} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|x_j^2(t) + 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{d_i}{c_i}a_{ij}x_i(t)x_j(t-\tau_{ij}) - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|x_j^2(t-\tau_{ij}). \tag{2.22}$$

Juntando alguns termos em (2.22)

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|\right) x_j^2(t) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{c_i}a_{ij}x_i(t)\right) x_j(t-\tau_{ij}) - \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|\right) x_j^2(t-\tau_{ij}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}| + 2\frac{d_j}{c_j}a_{jj}\right) x_j^2(t) + 2\sum_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{d_i}{c_i}a_{ij}x_i(t)x_j(t-\tau_{ij}) - \right. \\
&\quad \left. -\left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|\right) x_j^2(t-\tau_{ij})\right],
\end{aligned} \tag{2.23}$$

verificamos que o coeficiente de $x_i^2(t)$, para $i$ fixo, é dado por

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{d_j}{c_i}|a_{ji}| + 2\frac{d_i}{c_i}a_{ii}. \tag{2.24}$$

De (2.20) e de (2.21) tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c_i}\left(d_{ii}a_{ii} + \sum_{j\neq i} d_j|a_{ji}|\right) + \frac{d_i}{c_i^2}\left(a_{ii}c_i + \sum_{j\neq i}|a_{ji}|c_j\right) \leq 0 \qquad (2.25)\\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d_i}{c_i}a_{ii} + \sum_{j\neq i}\frac{d_j}{c_i}|a_{ji}| + \frac{d_i}{c_i}a_{ii} + \sum_{j\neq i}\frac{d_i}{c_i^2}|a_{ij}|c_j \leq 0\\
\Leftrightarrow \quad & 2\frac{d_i}{c_i}a_{ii} + \sum_{j\neq i}\frac{d_j}{c_i}|a_{ji}| \leq -\sum_{j\neq i}\frac{d_i}{c_i^2}c_j|a_{ij}|.
\end{aligned}$$

Assim, de (2.23), (2.24) e (2.25), tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V} \quad & \leq \quad -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{d_j}{c_j^2}c_i|a_{ji}|x_j^2(t) + \sum_{i,j=1}^{n}2\frac{d_i}{c_i}a_{ij}x_i(t)x_j(t-\tau_{ij}) - \sum_{i,j=1}^{n}\frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|x_j^2(t-\tau_{ij})\\
& = \quad -\sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{d_i}{c_i^2}c_j|a_{ij}|x_i^2(t) - 2\frac{d_i}{c_i}a_{ij}x_i(t)x_j(t-\tau_{ij}) + \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|x_j^2(t-\tau_{ij})\right],
\end{aligned}$$

e esta desigualdade reduz-se a

$$\dot{V} \leq -\sum_{i\neq j}\frac{d_i}{c_j}|a_{ij}|\left(\frac{c_j}{c_i}x_i(t)sgn(a_{ij}) - x_j(t-\tau_{ij})\right)^2 \leq 0, \tag{2.26}$$

o que prova que $V$ é um funcional de Liapunov. □

Note-se que $V$ é limitado superiormente ao longo de uma solução positiva. Com efeito, a função $t \mapsto V(y(.), t)$ é decrescente ao longo de soluções positivas $y(t)$, logo tem-se

$$V(y(.), t) \leq V(y(.), 0) \quad \text{para } t \geq 0.$$

**Lema 2.14.** *Seja $y(t)$, $t \geq 0$, uma solução positiva de (2.1). Se $A$ é uma matriz irredutível e fracamente diagonalmente dominante, então existem constantes $l, L > 0$ tais que $l \leq y_i(t) \leq L$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $t \geq 0$.*

*Demonstração.* Dada uma solução positiva $y(t)$ de (2.1), defina-se a seguinte aplicação:

$$F(y(t)) = F(y_1(t), \dots, y_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i(t) - y_i^* \log y_i(t)).$$

Por $V$ ser um funcional de Liapunov, sabemos que $V(y(.), t) \leq K$, para alguma constante $K > 0$. Da definição de $V$ resulta que

$$F(y(t)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i(t) - y_i^* \log y_i(t)) \leq V(y(.), t) \leq K.$$

Definam-se:

$$m_i = \liminf_{t \to +\infty} y_i(t) \quad e \quad M_i = \limsup_{t \to +\infty} y_i(t);$$

a questão é agora provar que $0 < m_i \leq M_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$.

Faça-se

$$m = \min_{1 \leq i \leq n} m_i \quad e \quad M = \max_{1 \leq i \leq n} M_i$$

e provemos que $m > 0$ e $M < +\infty$.

Suponhamos que $M = +\infty$. Então existe $i \in \{1, \dots, n\}$ e existe $\{t_m\} \subset \mathbb{R}_0^+$ com $t_m \to +\infty$ tal que $y_i(t_m) \to +\infty$. Consideremos as funções reais

$$f_j(x) = x - y_j^* \log x, \quad x > 0$$

e observemos que $f_j'(x) = 1 - \frac{y_j^*}{x} < 0$ se e só se $x < y_j^*$ o que implica que a função $f_j$ tem em $y_j^*$ um ponto de mínimo. O mínimo de $f_j$ é $f_j(y_j^*) = y_j^*(1 - \log y_j^*)$. Tem-se

$$\begin{aligned} F(y(t_m)) &= \alpha_i (y_i(t_m) - y_i^* \log y_i(t_m)) + \sum_{j \neq i}^{n} \alpha_j f_j(y_j(t_m)) \\ &\geq \alpha_i (y_i(t_m) - y_i^* \log y_i(t_m)) + \sum_{j \neq i}^{n} \alpha_j f_j(y_j^*) \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $y_i(t_m) \to +\infty$, tem-se

$$\lim_{m \to +\infty} F(y(t_m)) = +\infty.$$

Por outro lado,
$$\lim_{m\to+\infty} F(y(t_m)) \leq K < +\infty$$
o que é absurdo. Logo, $M < +\infty$.

De forma análoga, supondo que $m = 0$ prova-se que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ e existe $\{t_m\} \subset \mathbb{R}_0^+$ com $t_m \to +\infty$ com $y_i(t_m) \to 0$ e

$$F(y(t_m)) \geq \alpha_i(y_i(t_m) - y_i^* \log y_i(t_m)) + \sum_{j\neq i}^{n} \alpha_j f_j(y_j^*) \longrightarrow +\infty$$

o que é um absurdo. Logo, $m > 0$.

Provámos então que existem constantes $l, L > 0$ tais que $l \leq y_i(t) \leq L$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ como queríamos. $\square$

**Lema 2.15.** *Se $y(t)$ é uma solução positiva de (2.1) e existem constantes $l, L > 0$ com $l \leq y_i(t) \leq L$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, $t \geq 0$, então a sua semi-órbita positiva é pré-compacta e o seu conjunto $\omega - limite$ é não vazio, compacto e invariante.*

*Demonstração.* Se a semi-órbita $\gamma^+(y(t))$ for pré-compacta então, pelo Lema 1.37, o seu conjunto $\omega - \textit{limite}$ é não vazio, compacto e invariante. Vamos usar o Teorema de Ascoli-Arzelà para provar que as órbitas $\gamma^+(y(t))$ são pré-compactas (totalmente limitadas). Primeiro provamos que $\gamma^+(y(t))$ é um conjunto equicontínuo. Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$. Com $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})$, tem-se

$$y_{it}(t_1) - y_{it}(t_2) = y_i(t + t_1) - y_i(t + t_2) = y_i'(t + \theta(t_1 - t_2))(t_1 - t_2),$$

para algum $\theta \in (0, 1)$, onde na segunda passagem se aplica o Teorema do Valor Médio. Isto implica que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|y_t(t_1) - y_t(t_2)| \leq K|t_1 - t_2| \quad \text{para } t \geq 0$$

pois a limitação uniforme de $y(t)$ em $[0, +\infty)$ implica, pela equação (2.1), que $\dot{y}(t)$ também é uniformemente limitada. Daqui concluímos que a família $(y_t)_{t\geq 0} = \gamma^+(y(t))$ é equicontínua o que prova, em conjunto com o facto de $\gamma^+(y(t))$ ser limitada, que a semi-órbita $\gamma^+(y(t))$ é pré-compacta, pelo Teorema de Ascoli-Arzelà. $\square$

Defina-se agora o conjunto $E = \{\phi \in \bar{G} : \dot{V}(\phi) = 0\}$ onde $V$ é o funcional dado por (2.18) e seja $M$ o seu subconjunto não vazio, maximal e invariante.

**Lema 2.16.** *Suponhamos que existe um vector com coordenadas positivas* $y^*$ *satisfazendo (2.3). Se* $A$ *é uma matriz irredutível tal que* $\det A \neq 0$ *e* $A$ *é fracamente diagonalmente dominante, então* $y^*$ *é globalmente assimptoticamente estável para (2.1) (para soluções com condições iniciais* $y_i(0) > 0$*) para todos os atrasos* $\tau_{ij}$ *satisfazendo (2.2).*

*Demonstração.* Consideremos o funcional $V$ definido por (2.18). Pelo Lema 2.13 sabemos que $V$ é um funcional de Liapunov no conjunto $G$. Seja $y(t)$ uma solução positiva de (2.1). Pelo Lema 2.14 sabemos que $y(t)$ é limitada para $t \geq 0$, ou seja, $\exists l, L > 0 : l \leq y_i(t) \leq L$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $t \geq 0$, e pelo Lema 2.15 concluímos que o conjunto $\omega(y(.))$ é não vazio, compacto e invariante. Nestas condições, podemos aplicar o Teorema 1.43 e concluir que $\omega(y(.))$ está contido em $M$, onde $M$ é o subconjunto maximal invariante de $E = \{\phi \in \bar{G} : \dot{V}(\phi) = 0\}$.

Vejamos o que são os conjuntos $E$ e $M$ neste caso. Observemos que, a partir das desigualdades (2.25) e (2.26), a igualdade $\dot{V} \equiv 0$ é possível para $y(.) \neq 0$ só se houver lugar às igualdades em (2.20) e (2.21) e $x_j(t - \tau_{ij}) = \frac{c_j}{c_i} x_i(t) sgn(a_{ij})$ for válido para todo $t \geq 0$ e todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$ e $a_{ij} \neq 0$. Inserindo estas informações em (2.17) obtemos, para $x_i = y_i - y_i^*$,

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i(t) &= y_i(t) \left( a_{ii} x_i(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \right) \\
&= y_i(t) \left( a_{ii} x_i(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \frac{c_j}{c_i} x_i(t) \right) \\
&= y_i(t) \left[ \frac{x_i(t)}{c_i} \left( a_{ii} c_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| c_j \right) \right] \qquad i = 1, \ldots, n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, $y(t)$ tem de ser uma solução constante da equação diferencial (2.1). Visto que $\det A \neq 0$, por hipótese, $y(t) \equiv y^*$ é a única solução constante positiva de (2.1). Portanto concluímos que $E = M = \{y^*\}$. Como $\omega(y(.)) \subset M$ e $\omega(y(.))$ é não vazio, $\omega(y(.)) = \{y^*\}$.

Logo podemos dizer que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y^*$, pelo que $y^*$ é um equilíbrio globalmente assimptoticamente estável da equação (2.1). $\square$

Dos Lemas 2.12 e 2.16 podemos concluir o seguinte resultado:

**Teorema 2.17.** *Suponhamos que existe um vector com coordenadas positivas $y^*$ satisfazendo (2.3). Então, se $A$ for uma matriz irredutível, $y^*$ é globalmente assimptoticamente estável para (2.1) (para condições iniciais $y_i(0) > 0$) para todos os atrasos $\tau_{ij}$ satisfazendo (2.2) se e só se $a_{ii} < 0$ para $i = 1, \ldots, n$, $\det A \neq 0$ e $A$ é fracamente diagonalmente dominante.*

O Teorema 2.10 está então provado para o caso em que a matriz $A$ é irredutível. A partir daqui trataremos o caso em que a matriz $A$ é redutível. Para isso estabelecem-se alguns resultados auxiliares, alguns ainda relativos a matrizes irredutíveis.

**Lema 2.18.** *Seja $A$ uma matriz irredutível e fracamente diagonalmente dominante tal que $\det A \neq 0$. Então existe um atractor global, $\mathcal{A}$, para o operador solução $T(t)$ da equação (2.1) dado por $T(t)\phi = y(t)(\phi)$, $\phi \in X = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n_+)$. Além disso, tem-se $\mathcal{A} = \{y^*\}$.*

*Demonstração.* Consideremos o operador $T(t)$ dado por $T(t)\phi = y(t)(\phi)$, com $\phi \in X = C([\tau, 0]; \mathbb{R}^n_+)$ e onde $y(t)(\phi)$ é a solução de (2.1) com condição inicial $y(0) = \phi$.

Comecemos por mostrar que $T(t)$ é completamente contínuo para $t \geq 0$.

Para provar que $T(t)$ é completamente contínuo temos de mostrar que $T(t)$ transforma conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos. Seja então $B \subset X$ limitado. Exactamente do mesmo modo que fizemos na demonstração do Lema 2.14 é fácil ver que o facto de $B$ ser limitado implica que os conjuntos $B_t = \{y(t)(\phi) : \phi \in B\} \subset G$, $t \geq 0$, são uniformemente limitados, superiormente e inferiormente por constantes positivas $l$ e $L$, ou seja, que existem constantes $l$ e $L$ tais que $l \leq y_i(t)(\phi) \leq L$, para $\phi \in B$, $i = 1, \ldots, n$, $t \geq 0$.

O mesmo raciocínio do Lema 2.15, tendo em conta que da equação (2.1) se tem que as derivadas $\dot{y}_i(t)(\phi) = \dot{y}_i(t, \phi)$ são uniformemente limitadas, permite concluir que o conjunto $B_t$ é equicontínuo. Visto que o conjunto $B_t$ é limitado e equicontínuo, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá $B_t$ é relativamente compacto. Logo, $T(t)$ é completamente contínuo.

Agora provamos que o conjunto $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é dissipativo pontualmente. Para isso, na definição de operador dissipativo pontualmente dada no Capítulo 1, consideramos o conjunto $K = \{y^*\}$. Este conjunto $K$ atrai todos os pontos de $X$, pelo facto de $M = \{y^*\}$ (ver Lema 2.16). Portanto $T(t)$ é dissipativo pontualmente.

Assim, pelo Teorema 1.40 concluímos que existe um atractor global $\mathcal{A}$ compacto.

Para terminarmos a prova resta mostrar que $\mathcal{A} = \{y^*\}$. Da demonstração do Lema 2.16 já sabemos que $\omega(y(.)) = \{y^*\}$ sendo $y(t)$ uma qualquer solução positiva e limitada de (2.1). Portanto,

$$\omega(\mathcal{A}) = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{A}} \omega(\gamma) = \{y^*\}$$

Como $\mathcal{A}$ é o atractor global, em particular, atrai conjuntos compactos de $X$. No Teorema 1.39 podemos tomar $K = \mathcal{A}$ e concluímos que $\omega(\mathcal{A}) = \{y^*\}$ é um conjunto não vazio compacto e invariante e é maximal com respeito a estas propriedades. Logo $\{y^*\}$ é o atractor global como queríamos demonstrar. □

**Proposição 2.19.** *Se $A$ é uma matriz não singular, irredutível e fracamente diagonalmente dominante e $y(t)$ é uma solução de (2.1) em $\mathbb{R}$, uniformemente limitada em $\mathbb{R}$, então $y(t) \equiv y^*$.*

*Demonstração.* Do Lema 2.18 sabemos que existe o atractor global $\mathcal{A} = \{y^*\}$ para a equação (2.1).

Seja $y(t)$ uma solução de (2.1) nas condições do enunciado. Temos que o conjunto

$$\overline{\gamma(y(t))} = \overline{\{y(t) : t \in \mathbb{R}\}}$$

é não vazio, invariante e compacto, pelo raciocínio usado na demonstração do Lema 2.15. Logo $\overline{\gamma(y(t))} \subset \mathcal{A} = \{y^*\}$, e concluímos que $\overline{\gamma(y(t))} = \{y^*\}$. Assim $y(t) \equiv y^*$. □

Suponhamos que $A$ é uma matriz triangular superior por blocos da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

onde $dim(A_{11}) = p$, e os blocos $A_{11}$ e $A_{22}$ são irredutíveis. Sendo assim, a equação (2.17) fica na forma

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(t) &= u_i(t) \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) + u_i(t) \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) && (2.28) \\ & \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, p\} \\ \dot{z}_i(t) &= z_i(t) \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \quad \text{para } i \in \{p+1, \ldots, n\} && (2.29) \end{aligned}$$

onde $u(t) = (y_1(t), \ldots, y_p(t))$ e $z(t) = (y_{p+1}(t), \ldots, y_n(t))$.

**Lema 2.20.** *Se a matriz $A_{22}$ de (2.27) é irredutível e fracamente diagonalmente dominante tal que $\det A_{22} \neq 0$ e $a_{ii} < 0$, $i = p+1, \ldots, n$, então para qualquer solução positiva, $z(t)$, de (2.29) tem-se*

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = z^* = (y^*_{p+1}, \ldots, y^*_n)$$

*Além disso, para cada solução $z(t) > 0$,*

$$|z(t) - z^*| \leq Ce^{-\epsilon t} \tag{2.30}$$

*para algumas constantes positivas $C$, $\epsilon$ e para $t \geq T$ para algum $T > 0$.*

*Demonstração.* A equação (2.29) é uma equação do tipo (2.17) com $A$ substituída por $A_{22}$ irredutível. Estamos portanto nas condições do Lema 2.16, sendo $z^* = (z^*_1, \ldots, z^*_n)$ o equilíbrio de (2.29). Assim, concluímos que

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = z^* = (y^*_{p+1}, \ldots, y^*_n).$$

A linearização de (2.29) em torno do equilíbrio $z^*$ é dada por

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_j(t - \tau_{ij}) \tag{2.31}$$

onde $C$ é a matriz com entradas $ij$ iguais a $c_{ij} = z^*_i a_{ij}$. A equação característica para (2.31) é dada por (2.9), com $B$ substituída pela matriz $C$. As suas raízes têm parte real negativa pelo Teorema 2.1. Assim, sendo (2.31) uma EDF linear cujos valores característicos têm parte real negativa, pelo Teorema 1.36 aplicado à equação (2.29), tem-se

$$\exists C_0, \epsilon > 0, \exists b > 0 : ||\phi - z^*|| < b \Rightarrow |z(t)(\phi) - z^*| \leq C_0 e^{-\epsilon t}, \quad t \geq 0$$

A solução $z(t)$ de (2.29) está fixada. Por outro lado, $z(t) \to z^*$ quando $t \to +\infty$. Logo, existe $T > 0$ tal que $|z_T - z^*| < b$. Mas, como (2.29) é uma equação autónoma tem-se

$$|z(t) - z^*| \leq C_0 e^{-\epsilon(t-T)}, \text{ para } t \geq T,$$

donde

$$|z(t) - z^*| \leq C_1 e^{-\epsilon t}, \quad t \geq T$$

para alguma constante $C_1 > 0$. □

**Lema 2.21.** *Suponhamos que $A$ dada por (2.27) é uma matriz fracamente diagonalmente dominante tal que* $\det A \neq 0$ *e* $a_{ii} < 0$. *Seja* $p < n$ *um natural que representa a dimensão do bloco irredutível* $A_{11}$ *de (2.27). Seja* $V$ *o funcional dado por (2.18), com* $n$ *substituído por* $p$. *Então, ao longo de uma solução* $y(t) = (u(t), z(t))$ *de (2.1) tem-se*

$$\dot{V} \leq C_1(V(t) + C_2)e^{-\epsilon t} \tag{2.32}$$

*para constantes* $C_1$ *e* $C_2 > 0$ *e para* $t \geq T$ *para algum* $T > 0$.

*Demonstração.* Escreva-se (2.1) na forma (2.28)-(2.29) e seja $y^* = (u^*, z^*)$, com $u^* = (y_1^*, \ldots, y_p^*)$ e $z^* = (y_{p+1}^*, \ldots, y_n^*)$. Usando os cálculos na demonstração do Lema 2.13, substituíndo $n$ por $p$, tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \dot{y}_i(t) \left(1 - \frac{y_i^*}{y_i(t)}\right) + \sum_{i,j=1}^{p} \beta_{ij}[x_j^2(t) - x_j^2(t-\tau_{ij})] \\
&= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i(t) \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij} x_j(t-\tau_{ij})\right) + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{p} \beta_{ij}[x_j^2(t) - x_j^2(t-\tau_{ij})] \\
&= \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_i x_i(t) a_{ij} x_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{i,j=1}^{p} \beta_{ij}[x_j^2(t) - x_j^2(t-\tau_{ij})] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i(t) \left(\sum_{j=p+1}^{n} a_{ij} x_j(t-\tau_{ij})\right).
\end{aligned}$$

Tendo em conta que $A_{11} = [a_{ij}]_{i,j\in\{1,\ldots,p\}}$ é irredutível, utilizando (2.26) na demonstração do Lema 2.13, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{p} \alpha_i x_i(t) a_{ij} x_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{i,j=1}^{p} \beta_{ij}[x_j^2(t) - x_j^2(t-\tau_{ij})] &\leq \\
\leq -\sum_{i\neq j}^{p} \frac{d_i}{c_j}|a_{ij}| \left(\frac{c_j}{c_i} x_i(t) sgn(a_{ij}) - x_j(t-\tau_{ij})\right)^2 &\leq 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i(t) \left(\sum_{j=p+1}^{n} a_{ij} x_j(t-\tau_{ij})\right). \tag{2.33}$$

Como

$$x_i(t) \leq \max_{j \in \{1,\ldots,p\}} |x_j(t)| = |u(t) - u^*| \text{ para } i \in \{1, \ldots, p\}$$

e

$$x_j(t - \tau_{ij}) \leq \max_{i \in \{p+1,\ldots,n\}} |x_i(t - \tau_{ij})| = |z(t) - z^*| \leq Ce^{-\epsilon t},$$

para $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ e $t \geq T$, onde a última desigualdade vem de (2.30), podemos fazer a seguinte majoração:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i(t) \left( \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \right) \leq |u(t) - u^*||z(t) - z^*| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}$$

donde

$$\dot{V} \leq |u(t) - u|CD_1 e^{-\epsilon t} = D_2|u(t) - u|e^{-\epsilon t}, \; t \geq T, \tag{2.34}$$

onde $D_1$ e $D_2 = CD_1$ são constantes positivas. Agora vamos provar que

$$|u(t) - u|e^{-\epsilon t} \leq C_1(V(t) + C_2)e^{-\epsilon t} \quad \text{para algumas constantes } C_1 \text{ e } C_2.$$

Seguindo a notação das funções $f_i$ e $F$ da demonstração do Lema 2.14, mas restringindo as variáveis às primeiras $p$ componentes de $y(t)$, temos:

$$V(t) \geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (y_i(t) - y_i^* \log y_i(t)) = F(y(t)).$$

Na demonstração do Lema 2.14 mostrou-se que cada função $f_i$ tem mínimo dado por $f_i(y_i^*)$. Definindo,

$$g_i(x_i) = f_i(x_i + y_i^*),$$

obtém-se a função

$$g_i(x_i) = x_i + y_i^* - y_i^* \log(x_i + y_i^*) \geq m_i := f_i(y_i^*).$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, considerem-se constantes $c_i > 0$ e $d_i < m_i$ tais que o gráfico da função $h_i = c_i|x_i| + d_i$ está abaixo do gráfico de $g_i$. Tem-se portanto,

$$\begin{aligned}
V(t) &\geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(y_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i(x_i) \\
&\geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (c_i |x_i| + d_i) \\
&\geq D_3 \max_{i \in \{1,\ldots,p\}} |x_i| + D_4 = D_3 |u(t) - u^*| + D_4
\end{aligned}$$

pelo que,

$$D_3 |u(t) - u^*| \leq V(t) - D_4, \tag{2.35}$$

onde $D_3$ e $D_4$ são constantes que verificam

$$D_3 \leq \min_{i \in \{1,\ldots,p\}} \alpha_i c_i,$$

$$D_4 \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i d_i.$$

De (2.33), (2.34) e (2.35) concluímos que:

$$\dot{V} \leq C_1 (V(t) + C_2) e^{-\epsilon t}, \ t \geq T,$$

para constantes $C_1$ e $C_2$ como queríamos provar. □

**Lema 2.22.** *Se o funcional $V$ dado por (2.18), com $n$ substituído por $p$, verifica a desigualdade diferencial (2.32) então $V(t)$ é limitado.*

*Demonstração.* Consideremos a desigualdade diferencial

$$\dot{V} \leq C_1 (V(t) + C_2) e^{-\epsilon t} \quad t \in [0, +\infty[$$

e o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dot{w} = C_1 (w + C_2) e^{-\epsilon t} \\ w(0) = V(0). \end{cases} \tag{2.36}$$

Resolvendo a EDO $\dot{w} = C_1 (w + C_2) e^{-\epsilon t}$ verificamos que a única solução é

$$w(t) = (V(0) + C_2) e^{\frac{C_1}{\epsilon}\left(1 - e^{-\epsilon t}\right)} - C_2.$$

Temos então, pelo Corolário 1.62 de [12], $V(t) \leq w(t) \quad \forall t \in [0, +\infty)$.
Como,

$$\lim_{t \to +\infty} w(t) = \lim_{t \to +\infty} (V(0) + C_2) e^{\frac{C_1}{\epsilon}(1 - e^{-\epsilon t})} - C_2 = (V(0) + C_2) e^{\frac{C_1}{\epsilon}} < +\infty$$

tem-se que $V(t)$ é limitado em $[0, +\infty)$. □

**Lema 2.23.** *Seja $A$ uma matriz redutível e fracamente diagonalmente dominante tal que* $\det A \neq 0$ *e* $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Então:*

*a) Para qualquer solução positiva $y(t)$ de (2.1), existem constantes positivas $l$ e $L$ tais que $l \leq y_i(t) \leq L$ para todo $t \geq 0$ e para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

*b) Se $y(t)$ é uma solução positiva de (2.1) definida para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que existem constantes positivas $l$ e $L$ tais que $l \leq y(t) \leq L$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $y(t) \equiv y^*$.*

*c) Para qualquer solução positiva $y(t)$ de (2.1) tem-se* $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y^*$.

*Demonstração.*
Como já foi observado, se $A$ é redutível, depois de uma permutação de linhas e colunas (a que corresponde trocar a ordem das componentes da solução $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)))$, podemos escrevê-la na forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & A_{kk} \end{bmatrix}$$

onde $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ com $n_i = dim(A_{ii})$ e cada um dos blocos diagonais $A_{ii}, i = 1, \ldots, k$, ou é zero (que neste caso não é possível porque $\det A \neq 0$) ou é irredutível.

Vamos provar as afirmações no enunciado por indução em $k$ (número de blocos irredutíveis de $A$).
*Caso $k = 1$:* Neste caso a matriz $A$ reduz-se a um único bloco irredutível, ou seja, a matriz $A$ é irredutível. Assim, pelo Lema 2.14 temos $a$), pela Proposição 2.19 temos $b$) e pelo Teorema 2.17 temos $c$).

Para completar a indução basta considerar o caso $k = 2$. Com efeito, fazendo a indução em $k$ temos, como hipótese de indução, que $a$), $b$) e $c$)

são válidas para $A$ com $k$ blocos irredutíveis. Agora para provarmos as três afirmações do lema para $A$ com $k+1$ blocos irredutíveis, consideramos a equação (2.17) desdobrada nas seguintes $k+1$ equações:

$$\begin{aligned} \dot{w}_i^s(t) &= w_i^s(t) \sum_{j=n_{s-1}+1}^{n_s} a_{ij} x_j(t-\tau_{ij}) + \ldots + w_i^s(t) \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_{ij} x_j(t-\tau_{ij}) \\ & \text{para } i = n_{s-1}+1, \ldots, n_s \text{ e } s = 1, \ldots, k+1 \end{aligned}$$

onde $w^s(t) = (y_{n_{s-1}+1}(t), \ldots, y_{n_s}(t))$, para $s = 1, \ldots, k+1$.

Considere-se a solução $y(t) = (w^1(t), W(t))$ de (2.1), onde notamos $W(t) = (w^2(t), \ldots, w^{k+1}(t))$. Pela hipótese de indução *a*), *b*) e *c*) são válidas para $W(t)$. Argumentando como para o caso $k = 2$ concluímos que *a*), *b*) e *c*) são válidas para $y(t) = (w^1(t), W(t))$.

Provemos então *a*), *b*) e *c*) no caso em que $A$ tem dois blocos irredutíveis, ou seja, é da forma,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde $dim(A_{11}) = p$, e os blocos $A_{11}$ e $A_{22}$ são irredutíveis. Esta matriz é do tipo (2.27) e consequentemente, como já foi visto, a equação (2.1) desdobra-se nas equações (2.28) e (2.29).

Consideremos então o funcional $V$ definido por (2.18), com $n$ substituído por $p$, dimensão do bloco $A_{11}$. Os dois lemas anteriores garantem-nos que este funcional é limitado. Logo por um raciocínio análogo ao que fizemos no Lema 2.14 podemos concluir que o vector $u(t)$ é uniformemente limitado, ou seja, as primeiras $p$ componentes de $y(t)$ são limitadas. Visto que, pelo Lema 2.14, o vector $z(t)$ também é uniformemente limitado, podemos dizer que existem constantes positivas $l$ e $L$ tais que $l \leq y_i(t) \leq L$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $t \geq 0$ o que termina a prova de *a*).

Agora considere-se uma solução global $y(t) = (u(t), z(t))$ de (2.1), i.e., definida para todo $t \in \mathbb{R}$, e suponha-se que existem constantes positivas $l$ e $L$ tais que $l \leq y_i(t) \leq L$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Considere-se a solução $z(t)$ de (2.29). Como o bloco $A_{22}$ é irredutível e fracamente diagonalmente dominante, estamos em condições de aplicar a Proposição 2.19 a $A_{22}$ e concluir que $z(t) \equiv z^*$. Então $(x_{p+1}(t), \ldots, x_n(t)) \equiv$

0 logo $u(t)$ satisfaz a equação

$$\dot{u}_i(t) = u_i(t) \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, p\}.$$

Como $A_{11}$ é irredutível e também fracamente diagonalmente dominante podemos concluir, novamente usando a Proposição 2.19, que $u(t) \equiv u^*$ . Logo $y(t) \equiv y^*$ o que prova *b*).

Para provar *c*) teremos de mostrar que $\omega(y(t)) = \{y^*\}$ para $y(t)$ uma qualquer solução positiva de (2.1). Seja $y(t)$ $(t \geq 0)$ uma solução positiva de (2.1). Por *a*) sabemos que $y(t)$ é uniformemente limitada, logo pelo Lema 2.15 a sua órbita é pré-compacta e o seu conjunto $\omega - limite$, $\omega(y(t))$, é não vazio, compacto e invariante. Sendo $\phi \in \omega(y(t))$, então a órbita $y(t)(\phi)$ passando por $\phi$, é uma órbita completa contida em $\omega(y(t))$. Por *b*), tem-se $y(t)(\phi) \equiv y^*$. Donde se conclui que $\omega(y(t)) = \{y^*\}$. □

*Demonstração.* (do Teorema 2.10) A condição necessária segue do Lema 2.12. A condição suficiente segue do Lema 2.23. □

# Capítulo 3

# Sistemas $n$-dimensionais com atrasos discretos. Modelos de Redes Neuronais e de Lotka-Volterra.

O objectivo deste capítulo é fazer o estudo da estabilidade de equilíbrios de equações diferenciais que incluem modelos de Lotka-Volterra e de redes neuronais com atrasos discretos, num caso mais geral do que o do capítulo anterior. Nomeadamente, na secção 3.3, estudamos a estabilidade global de sistemas de Lotka-Volterra com atrasos discretos sem a restrição dos atrasos "diagonais" serem zero.

## 3.1 Estabilidade Linear

Nesta secção estudamos a estabilidade da equação linear

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t - \tau_{ij}), \tag{3.1}$$

onde $b_i, c_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\tau_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, que é mais geral do que a do Capítulo 2, porque são permitidos atrasos "diagonais". Para isso analisamos as raízes $\lambda$ da equação característica, que correspondem a soluções não-triviais de (3.1) da forma $x(t) = e^{\lambda t} v$, com $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.

Analogamente ao que foi feito no capítulo anterior, a equação (3.1) tem a forma (2.7), onde o operador linear $L(\phi) = (L_1(\phi), \ldots, L_n(\phi))$ é dado por

$$L_i(\phi) = -b_i\phi_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\phi_j(-\tau_{ij})$$

para $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ sendo $h = \max_{i,j} \tau_{ij}$. A sua equação característica escreve-se na forma

$$\det(L(e^{\lambda \cdot} I) - \lambda I) = 0.$$

Sendo $L_i(e^{\lambda \cdot} e_k)$ a entrada $ik$ de $L(e^{\lambda \cdot} I)$, onde denotamos por $e_k$ o $k$-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} L_i(e^{\lambda \cdot} e_k) &= c_{ik}e^{-\tau_{ik}\lambda} \quad \text{se } k = i. \\ L_i(e^{\lambda \cdot} e_i) &= -b_i e^{\lambda t} e_{ii} + c_{ii}e^{-\tau_{ii}\lambda} \quad \text{se } k \neq i. \end{aligned}$$

Assim, a equação característica para (3.1) é dada por

$$det \underbrace{\begin{bmatrix} -b_1 + c_{11}e^{-\lambda\tau_{11}} - \lambda & c_{12}e^{-\lambda\tau_{12}} & \ldots & c_{1n}e^{-\lambda\tau_{1n}} \\ c_{21}e^{-\lambda\tau_{21}} & -b_2 + c_{22}e^{-\lambda\tau_{22}} - \lambda & \ldots & c_{2n}e^{-\lambda\tau_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}e^{-\lambda\tau_{n1}} & c_{n2}e^{-\lambda\tau_{n2}} & \ldots & -b_n + c_{nn}e^{-\lambda\tau_{nn}} - \lambda \end{bmatrix}}_{\Delta_n(C,b)(\lambda,\tau)} = 0 \tag{3.2}$$

em que denotamos por $\Delta_n(C, b)(\lambda, \tau)$ a matriz $[L_i(e^{\lambda \cdot} e_j)]_{i,j}$ obtida e $\tau = [\tau_{ij}]$.

Consideremos as matrizes $B = diag(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $C = [c_{ij}]$ e $|C| = [|c_{ij}|]$ associadas a (3.2) e definamos as matrizes

$$K = -B + C \quad e \quad \hat{K} = -B + |C|.$$

No que resta desta secção vamos determinar condições necessárias e suficientes sobre as matrizes $K$ e $\hat{K}$ para que todas as raízes de (3.2) tenham parte real negativa, independentemente do tamanho dos atrasos $\tau_{ij}$.

As condições obtidas nesta secção são uma ligeira generalização daquelas presentes na secção 2.2 sendo a prova dos resultados semelhante à que fizemos nessa mesma secção. A principal diferença é que permitimos atrasos nos termos “intraespécies”, no caso de sistemas Lotka-Volterra, e de “autoconexão”, no caso de redes neuronais, i.e., os atrasos “diagonais” $\tau_{ii}$ não são necessariamente zero.

Começamos por apresentar o seguinte lema:

**Lema 3.1.** *$\lambda = 0$ é uma solução da equação (3.2) se e só se* $\det K = 0$.

*Demonstração.* A conclusão segue imediatamente do facto de $\Delta(C, b)(0, \tau) = \det K$. $\square$

Para a prova da estabilidade local, estabelecemos de seguida alguns lemas.

**Lema 3.2.** *Se $-\hat{K}$ é uma M-matriz e* $\det K \neq 0$ *então todas as raízes de (3.2) têm parte real negativa para todos os $\tau_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$.*

*Demonstração.* Primeiro considere-se o caso em que $-\hat{K}$ é **irredutível**. Pelo Teorema 1.58, existem $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ tais que

$$\hat{k}_{ii}\gamma_i + \sum_{j \neq i} \hat{k}_{ij}\gamma_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n,$$

onde $\hat{K} = [\hat{k}_{ij}]$. Isto é,

$$(-b_i + |c_{ii}|)\gamma_i + \sum_{j \neq i} |c_{ij}|\gamma_j \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Seja $\lambda$ uma raiz de (3.2). Então $\lambda$ é um valor próprio da matriz $D = [d_{ij}]$, onde $d_{ii} = -b_i + c_{ii}e^{-\lambda\tau_{ii}}$ e $d_{ij} = c_{ij}e^{-\lambda\tau_{ij}}$, $i \neq j$. Aplicando o Teorema de Gershgorin à matriz $\hat{D} = [\gamma_i d_{ij}\gamma_j]$, sabemos que cada valor próprio, $\hat{\lambda}$, de $\hat{D}$ satisfaz

$$|\hat{\lambda} - d_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} \gamma_i^{-1}|d_{ij}|\gamma_j$$

para pelo menos um $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $D$ é semelhante a $\hat{D}$, têm os mesmos valores próprios. Então para cada valor próprio $\lambda$ de $D$ existe um $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que

$$Re(\lambda) \leq Re(d_{ii}) + \sum_{j \neq i} \gamma_i^{-1}|d_{ij}|\gamma_j.$$

Suponhamos que $Re(\lambda) \geq 0$. Então,

$$Re(d_{ii}) \leq -b_i + |c_{ii}e^{-\lambda\tau_{ii}}| = -b_i + |c_{ii}|e^{-Re(\lambda)\tau_{ii}} \leq -b_i + |c_{ii}|$$

pois $e^{-Re(\lambda)\tau_{ii}} \leq 1$ visto que, por hipótese, $Re(\lambda) \geq 0$. Também

$$|d_{ij}| = |c_{ij}| e^{-Re\lambda\tau_{ij}} \leq |c_{ij}|,$$

logo tem-se

$$Re(\lambda) \leq -b_i + |c_{ii}| + \sum_{j \neq i} \gamma_i^{-1} |c_{ij}| \gamma_j \tag{3.4}$$

Assim,

$$\gamma_i Re(\lambda) \leq (-b_i + |c_{ii}|)\gamma_i + \sum_{j \neq i} |c_{ij}| \gamma_j \leq 0$$

por (3.3), o que implica que $Re(\lambda) \leq 0$. Agora ocorre igualdade em (3.4) só quando $\lambda$ é real e, o facto de termos $\det K \neq 0$ impede que $\lambda = 0$, logo chegamos a uma contradição. Portanto concluímos que $Re(\lambda) < 0$ para todos os valores próprios $\lambda$ de $D$.

Considere-se agora o caso em que $-\hat{K}$ é **redutível**. Então existe uma matriz de permutação $P$ tal que:

$$P(-\hat{K})P^T = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \hat{K}_{n1} & \hat{K}_{n2} & \dots & \dots & \hat{K}_{nn} \end{bmatrix}$$

onde cada $\hat{K}_{ii}$ é quadrada e irredutível ou nula. Como já justificámos no capítulo anterior, dado que $-\hat{K}$ é uma M-matriz, cada $\hat{K}_{ii}$ é uma M-matriz. Seja $\lambda$ uma raiz de (3.2) e definamos $D$ como acima. Então $PDP^T$ é também uma matriz triangular inferior por blocos, com blocos $\tilde{D}_{ii}$ correspondentes aos blocos $\hat{K}_{ii}$. Como

$$\begin{aligned} \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau) &= \det(D - \lambda I) \\ &= \pm \det(PDP^T - \lambda I) \\ &= \pm \prod_i \det(\tilde{D}_{ii} - \lambda I) \end{aligned}$$

$\lambda$ será raiz de $\det(\tilde{D}_{ii} - \lambda I)$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. O resto da prova segue de aplicarmos o argumento para o caso irredutível a cada bloco $\hat{K}_{ii}$. $\square$

**Lema 3.3.** *Se* $\det(-\hat{K}) < 0$, *com* $b_i > 0$, *então existem atrasos* $\tau_{ij} \geq 0$ *tais que (3.2) tem uma raiz* $\lambda$ *com* $Re(\lambda) > 0$.

*Demonstração.* A demonstração deste resultado é análoga à do Lema 2.6 do Capítulo 2 por isso daremos só os passos principais da mesma. Começamos por considerar a função:

$$F_\epsilon(z) = det\begin{bmatrix} -b_1 + c_{11}e^{-z\eta_{11}} - z\epsilon & c_{12}e^{-z\eta_{12}} & \dots & c_{1n}e^{-z\eta_{1n}} \\ c_{21}e^{-z\eta_{21}} & -b_2 + c_{22}e^{-z\eta_{22}} - z\epsilon & \dots & c_{2n}e^{-z\eta_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}e^{-z\eta_{n1}} & c_{n2}e^{-z\eta_{n2}} & \dots & -b_n + c_{nn}e^{-z\eta_{nn}} - z\epsilon \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

onde

$$\eta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{para } c_{ij} < 0 \\ 1, & \text{para } c_{ij} \geq 0 \end{cases}.$$

Para $z = x + 2\pi i$, onde $x$ é real, calculemos $F_0(z)$:

$$\begin{aligned} D(x) &:= F_0(x + 2\pi i) \\ &= det\begin{bmatrix} -b_1 + c_{11}e^{-x\eta_{11}} & c_{12}e^{-x\eta_{12}} & \dots & c_{1n}e^{-x\eta_{1n}} \\ c_{21}e^{-x\eta_{21}} & -b_2 + c_{22}e^{-x\eta_{22}} & \dots & c_{2n}e^{-x\eta_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}e^{-x\eta_{n1}} & c_{n2}e^{-x\eta_{n2}} & \dots & -b_n + c_{nn}e^{-x\eta_{nn}} \end{bmatrix} \\ &= det\begin{bmatrix} -b_1 + |c_{11}|e^{-x\eta_{11}} & |c_{12}|e^{-x\eta_{12}} & \dots & |c_{1n}|e^{-x\eta_{1n}} \\ |c_{21}|e^{-x\eta_{21}} & -b_2 + |c_{22}|e^{-x\eta_{22}} & \dots & |c_{2n}|e^{-x\eta_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |c_{n1}|e^{-x\eta_{n1}} & |c_{n2}|e^{-x\eta_{n2}} & \dots & -b_n + |c_{nn}|e^{-x\eta_{nn}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por hipótese, $(-1)^n D(0) = \det(-\hat{K}) < 0$. Além disso

$$(-1)^n \lim_{x \to +\infty} D(x) = b_1 b_2 \dots b_n > 0.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $\hat{x} > 0$ tal que $D(\hat{x}) = 0$ e $\hat{z} = \hat{x} + 2\pi i$ é um zero de $F_0$. Como $F_0$ é uma função analítica (não constante) o zero $\hat{z}$ é isolado. Assim é possível encontrar uma curva de Jordan $\gamma$ em que $\hat{z}$ é o único zero de $F_0(z)$ em $\gamma \cup int(\gamma)$. Como $F_\epsilon(z) \to F_0(z)$ quando $\epsilon \to 0^+$ uniformemente em $\gamma$, para $\epsilon > 0$ pequeno tem-se

$$\max_{z \in \gamma} |g_\epsilon(z)| < \min_{z \in \gamma} |F_0(z)|$$

onde $g_\epsilon(z) = F_\epsilon(z) - F_0(z)$. Logo, pelo Teorema de Rouché $F_\epsilon$ e $F_0$ têm o mesmo número de zeros no interior de $\gamma$, o que implica que $F_\epsilon$ tem um zero $\hat{z}(\epsilon)$ perto de $\hat{z}$, para $\epsilon$ pequeno. Claramente, $\lambda = \hat{z}(\epsilon)$ e $\tau_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{\epsilon}$ satisfazem (3.2) com $Re(\lambda) > 0$. □

**Lema 3.4.** *Se $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ e $-\hat{K}$ não é uma M-matriz, então existem atrasos $\tau_{ij} \geq 0$ tais que (3.2) tem uma raiz com $Re(\lambda) > 0$.*

*Demonstração.* Dado que $-\hat{K}$ não é uma M-matriz, segue-se que algum menor principal, $-\hat{K}_m$, de ordem $m$ de $-\hat{K}$ é negativo. Por conveniência de notação, vamos assumir que $\det(-\hat{K}_m) < 0$ onde $\hat{K}_m$ é a submatriz $m \times m$ obtida de $\hat{K}$ mantendo as primeiras $m$ linhas e colunas; este argumento é válido para qualquer menor principal.

Aplicando o Lema 3.3 a $\hat{K}_m$, concluímos que a equação característica correspondente a esta submatriz, dada por

$$det \underbrace{\begin{bmatrix} -b_1 + c_{11}e^{-\lambda\tau_{11}} - \lambda & c_{12}e^{-\lambda\tau_{12}} & \ldots & c_{1m}e^{-\lambda\tau_{1m}} \\ c_{21}e^{-\lambda\tau_{21}} & -b_2 + c_{22}e^{-\lambda\tau_{22}} - \lambda & \ldots & c_{2m}e^{-\lambda\tau_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}e^{-\lambda\tau_{m1}} & c_{m2}e^{-\lambda\tau_{m2}} & \ldots & -b_m + c_{mm}e^{-\lambda\tau_{mm}} - \lambda \end{bmatrix}}_{\Delta_m(C,b)(\lambda,\tau)} = 0$$

tem uma raiz $\hat{\lambda}$ com $Re(\hat{\lambda}) > 0$. Sendo $S = \{j = (j_1, \ldots, j_m) : j_i \in \{1, \ldots, n\}, i = 1, \ldots, m\}$ tem-se que o cardinal deste conjunto $S$ é $C^n_m$. Designando por $J_0 = (1, 2, \ldots, m)$ e por $P_{n-m}$ o conjunto das permutações dos índices $m+1, m+2, \ldots, n$, aplicando o Teorema de Laplace (ver Teorema 1.46) a $\Delta_n(C,b)(\lambda,\tau) := [\alpha_{ij}(\lambda)]$, podemos escrever o determinante desta mesma matriz como

$$\det \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau) = \sum_{j \in S} \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$$
$$\Delta_n(C,b)(\lambda,\tau)^C \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$$
$$= \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}$$
$$(-1)^{(1+\ldots+m)+(1+\ldots+m)} \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau) \begin{pmatrix} m+1 & m+2 & \ldots & n \\ m+1 & m+2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$
$$+ \sum_{j \in S \setminus \{J_0\}} \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix} \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau)^C$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$$
$$= \det \Delta_m(C,b)(\lambda,\tau) \det \begin{bmatrix} \alpha_{m+1m+1}(\lambda) & \ldots & \alpha_{m+1n}(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{nm+1}(\lambda) & \ldots & \alpha_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} + R(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})$$

$$= \det \Delta_m(C,b)(\lambda,\tau)\left(\sum_{\sigma\in P_{n-m}} sgn(\sigma)\prod_{i=m+1}^{n}\alpha_{i\sigma(i)}(\lambda)\right) + R(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})$$

$$= \det \Delta_m(C,b)(\lambda,\tau)\left[\prod_{i=m+1}^{n}\alpha_{ii}(\lambda) + \sum_{\sigma\in P_{n-m}\setminus\{Id\}} sgn(\sigma)\prod_{i=m+1}^{n}\alpha_{i\sigma(i)}(\lambda)\right] +$$

$$+R(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})$$

$$= \det \Delta_m(C,b)(\lambda,\tau)\left[\prod_{i=m+1}^{n}\left(-b_i + c_{ii}e^{-\lambda\tau_{ii}}\right) + Q(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})\right] + R(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})$$

$$= \det \Delta_m(C,b)(\lambda,\tau)\left[P(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) + Q(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})\right] + R(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})$$

onde notamos por $\alpha_{ij}$ a entrada $i,j$ da matriz $\Delta_n(C,b)(\lambda,\tau)$ e,

$$\begin{aligned}
P(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) &= \prod_{i=m+1}^{n}\left(-b_i + c_{ii}e^{-\lambda\tau_{ii}} - \lambda\right)\\
Q(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) &= \sum_{\sigma\in P_{n-m}\setminus\{Id\}} sgn(\sigma)\prod_{i=m+1}^{n}\alpha_{i\sigma(i)}(\lambda)\\
R(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}}) &= \sum_{j\in S\setminus\{J_0\}} \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m\\ j_1 & j_2 & \dots & j_m\end{pmatrix}\\
&\quad\ \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau)^C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m\\ j_1 & j_2 & \dots & j_m\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e $|Q|$ e $|R|$ podem ser tomadas arbitrariamente pequenas para $Re(\lambda) > 0$ tomando $\tau_{ij}$ suficientemente grandes para $m+1 \leq i,j \leq n$. Utilizando o Teorema de Rouché, pode concluir-se que (3.2) também tem uma raiz com parte real positiva. Com efeito, as funções analíticas $\det \Delta_n(C,b)(\lambda,\tau)$ e $G_\tau(\lambda) = \det \Delta_m(C,b)(\lambda,\tau)P(\lambda, e^{-\lambda\tau_{ij}})$têm o mesmo número de zeros numa vizinhança de $\hat{\lambda}$, o que implica que (2.9) tem uma raiz, $\lambda$, perto de $\hat{\lambda}$, para $\tau_{ij}$ grande, para $i > m$ ou $j > m$ logo $Re(\lambda) > 0$ como queríamos demonstrar. □

**Teorema 3.5.** *A solução trivial da equação (3.1) é assimptoticamente estável para todos os atrasos* $\tau_{ij} \geq 0$ *se e só se* $-\hat{K}$ *é uma M-matriz e* $\det K \neq 0$.

*Demonstração.* Por resultados gerais de EDF's vistos no Capítulo 1, sabemos que a solução trivial de (3.12) é assimptoticamente estável se e só se todas as raízes $\lambda$ de (3.2) tiverem partes reais negativas.

A condição suficiente segue do Lema 3.2.A condição necessária é justificada pelos Lemas 3.1 e 3.4. □

**Observação 3.6.** *Se $a_{ij} \geq 0$ para todo o $i, j$ então as condições do Teorema 3.5 reduzem-se a $-K = -\hat{K}$ é uma M-matriz não singular.*

## 3.2 Estabilidade Global para sistemas de Redes Neuronais

O objecto de estudo desta secção é a seguinte equação diferencial funcional retardada, que representa uma rede neuronal:

$$\dot{u}_i(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_{ij}(u_j(t - \tau_{ij})) + J_i \tag{3.6}$$

onde $b_i > 0$, $\tau_{ij} \geq 0$, $a_{ij}, J_i \in \mathbb{R}$, para $i, j = 1, \ldots, n$, e as funções não lineares $g_j$ satisfazem:

$$g_j \in C^1(\mathbb{R}), \quad g_j'(u) > 0, \quad \sup_{u \in \mathbb{R}} g_j'(u) = g_j'(0) = 1 \tag{3.7}$$

$$g_j(0) = 0, \quad \lim_{u \to \pm\infty} g_j(u) = \pm 1 \tag{3.8}$$

**Nota 3.7.** *A função $g(u) = tanh(u)$, que é usada geralmente quando o modelo (3.6) retrata um sistema de redes neuronais satisfaz as condições (3.7) e (3.8).*

Os resultados desta secção podem ser encontrados em [2]. A razão da inclusão do estudo de estabilidade global de sistemas retardados de redes neuronais (3.6) neste trabalho prende-se com o facto de as técnicas utilizadas em [2] serem inspiradas nos argumentos de [16], expostos no Capítulo 2.

Vamos considerar problemas de valor inicial consistindo em (3.6) sujeita às condições:

$$u_i(\theta) = \phi_i(\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0, \tag{3.9}$$

onde $h = \max_{i,j} \tau_{ij}$ e $\phi_i$ são contínuas. A existência e unicidade local das soluções é assim garantida pelos Teoremas 1.8 e 1.10.

Pretendemos estudar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio de (3.6) que são soluções do tipo $u(t) = u^*$ para $t \geq -h$, cuja existência será estudada no próximo resultado. Assumindo que existe um ponto de equilíbrio $u^*$ e efectuando a sua translação para a origem pela transformação $u(t) = u^* + x(t)$, obtém-se

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[ g_j(x_j(t - \tau_{ij}) + u_j^*) - g_j(u_j^*) \right]. \tag{3.10}$$

Comecemos por encontrar a linearização de (3.10). Para isso usamos a hipótese (3.7) sobre $g$ para fazermos o seu desenvolvimento de Taylor:

$$g_j(x_j(t-\tau_{ij})+u_j^*) = g_j(u_j^*) + g_j'(u_j^*)x_j(t-\tau_{ij}) + O(x_j(t-\tau_{ij})) \tag{3.11}$$

e substituindo (3.11) em (3.10) ficamos com

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j'(u_j^*) x_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} O(x_j(t-\tau_{ij}))$$

Assim, a linearização de (3.10) em torno do equilíbrio $u^*$ é dada por

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t-\tau_{ij}), \tag{3.12}$$

onde $c_{ij} = a_{ij} g_j'(u_j^*)$. O estudo desta equação linear já foi feita na secção anterior.

Sendo as matrizes $K = -B+C$ e $\hat{K} = -B+|C|$ como na secção anterior, enunciamos de seguida o resultado para a estabilidade local de $u^*$.

**Corolário 3.8.** *Suponhamos que* $\det K \neq 0$. *Então a solução de equilíbrio* $u^*$ *de (3.6) é localmente assimptoticamente estável para todos os atrasos* $\tau_{ij} \geq 0$ *se e só se* $-\hat{K}$ *é uma M-matriz.*

*Demonstração.* A condição suficiente segue directamente do Teorema 3.5 e do Teorema 1.36 e a condição necessária vem pelo Lema 3.4. □

No que se segue vamos mostrar que condições ligeiramente mais fortes do que aquelas do Teorema 3.5 implicam a existência e estabilidade global de um ponto de equilíbrio da equação não linear (3.6).

Consideremos as matrizes $B = diag(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ e $A = [a_{ij}]$ associada a (3.6). Definimos as matrizes

$$\mathcal{K} = -B + A \quad e \quad \hat{\mathcal{K}} = -B + |A|,$$

onde $|A| = [|a_{ij}|]$.

**Proposição 3.9.** *Suponhamos que (3.7) e (3.8) são válidas. Se* $-\hat{\mathcal{K}}$ *é uma M-matriz não singular então (3.6) tem um único ponto de equilíbrio.*

*Demonstração.* Comecemos por observar que se $-\hat{\mathcal{K}}$ é uma M-matriz a sua transposta também o é. Então pelo Teorema 1.50 existem constantes $\gamma_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$ tais que:

$$-b_j\gamma_j + \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\gamma_i < 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.13}$$

Em particular, tem-se $b_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Defina-se

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \frac{1}{\gamma_j b_j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\gamma_i \right)$$

e divida-se ambos os membros de (3.13) por $\gamma_j b_j$, ficando com:

$$-1 + \frac{1}{\gamma_j b_j} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\gamma_i < 0 \Leftrightarrow \beta < 1.$$

Observemos que a equação (3.6) tem um ponto de equilíbrio, $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$, se os $u_i^*$ satisfizerem

$$b_i u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(u_j) + J_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.14}$$

o que é equivalente a

$$\gamma_i b_i u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(u_j) + \gamma_i J_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Definindo $v_i = \gamma_i b_i u_i$, então, para cada $i = 1, \ldots, n$, $u_i$ satisfaz (3.14) se e só se $v_i$ satisfaz

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^{n} \gamma_i a_{ij} g_j \left( \frac{v_j}{\gamma_j b_j} \right) + \gamma_i J_i \\ &:= G_i(v_1, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

Assim procuramos os pontos fixos da função $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $G(v) = (G_1(v), \ldots, G_n(v))$ onde $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Sob as hipóteses (3.7) e (3.8) tem-se

$$-1 \leq g_j(u) \leq 1,$$

pelo que podemos escrever,

$$\begin{aligned} G_i(v) &= \sum_{j=1}^{n} \gamma_i a_{ij} g_j \left( \frac{v_j}{\gamma_j b_j} \right) + \gamma_i J_i \\ &= \gamma_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j \left( \frac{v_j}{\gamma_j b_j} \right) + J_i \right) \\ &\leq \gamma_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + J_i \right) := \zeta_i^+ \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_i(v) &= \gamma_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j \left( \frac{v_j}{\gamma_j b_j} \right) + J_i \right) \\ &\geq \gamma_i \left( \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} + J_i \right) \\ &\geq \gamma_i \left( -\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + J_i \right) := \zeta_i^- \end{aligned}$$

Logo, para cada $i = 1, \ldots, n$, tem-se:

$$\zeta_i^- \leq G_i(v) \leq \zeta_i^+$$

Podemos dizer então que $G$ aplica o conjunto,

$$S = \{(v_1, \ldots, v_n) | \zeta_i^- \leq v_i \leq \zeta_i^+, i = 1, \ldots, n\}$$

nele próprio.

Além disso,

$$\begin{aligned}
||G(v)-G(w)|| &= \sum_{i=1}^{n}|G_i(v)-G_i(w)| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\gamma_i a_{ij} g_j\left(\frac{v_j}{\gamma_j b_j}\right)+\gamma_i J_i-\sum_{j=1}^{n}\gamma_i a_{ij} g_j\left(\frac{w_j}{\gamma_j b_j}\right)+\gamma_i J_i\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i|a_{ij}|\left|g_j\left(\frac{v_j}{\gamma_j b_j}\right)-g_j\left(\frac{w_j}{\gamma_j b_j}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i|a_{ij}|g_j'(\xi_j)\left|\frac{v_j}{\gamma_j b_j}-\frac{w_j}{\gamma_j b_j}\right| \qquad (3.16) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_i|a_{ij}|}{\gamma_j b_j}|v_j-w_j| \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

onde a desigualdade (3.16) é justificada pela aplicação do Teorema de Valor Médio e a desigualdade (3.17) segue da condição (3.7). Rearranjando os índices, vemos que

$$\begin{aligned}
||G(v)-G(w)|| &\leq \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\gamma_j b_j}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i|a_{ij}|\right)|v_j-w_j| \\
&\leq \beta\sum_{j=1}^{n}|v_j-w_j| \\
&= \beta||v-w||
\end{aligned}$$

onde $\beta < 1$. Então $G$ é uma contracção em $S$ e, pelo Princípio da Contracção, $G$ tem um único ponto fixo o que implica que (3.6) tem um único ponto de equilíbrio como queríamos demonstrar. □

Antes de enunciarmos o último teorema desta secção, apresentamos o seguinte resultado:

**Lema 3.10.** *Seja $f$ uma função não-negativa definida em $[0,\infty)$ tal que $f$ é integrável em $[0,\infty)$ e uniformemente contínua em $[0,\infty)$. Então*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

*Demonstração.* Suponhamos que $f$ não se aproxima de zero quando $t \to \infty$. Isto significa que existe um número positivo $\alpha$ e uma sucessão $\{t_n\} \to \infty$

quando $n \to \infty$ tal que $f(t_n) > \alpha > 0$ para $\forall n \geq 1$. A continuidade uniforme de $f$ assegura a existência de um $\beta$ positivo com a propriedade que $f(t) > \left(\frac{\alpha}{2}\right)$ para $|t - t_n| \leq \beta$, $n \geq 1$.

Podemos, sem perda de generalidade, assumir que os intervalos $(t_n - \beta, t_n + \beta)$ não se sobrepõem. Assim

$$\int_0^\infty f(t)dt \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{t_n-\beta}^{t_n+\beta} f(t)dt \geq N\alpha\beta$$

para qualquer inteiro positivo $N$ e isto contradiz a integrabilidade de $f$ em $[0, \infty)$. $\square$

**Teorema 3.11.** *Suponhamos que (3.7) e (3.8) são válidas. Se $-\hat{\mathcal{K}}$ é uma M-matriz não singular então o ponto de equilíbrio de (3.6) é globalmente assimptoticamente estável.*

*Demonstração.* Sejam $\gamma_i > 0$ como na demonstração da Proposição 3.9 e defina-se,

$$\mu = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ b_j \gamma_j - \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \gamma_i \right\}.$$

De (3.13), tem-se $\mu > 0$. A mudança de variáveis $x_i(t) = u_i(t) - u_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, transforma a equação diferencial retardada (3.6) em (3.10).

Consideremos o funcional $V(t) = V(x)(t)$ definido por

$$V(x)(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i |x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \int_{t-\tau_{ij}}^{t} |x_j(s)| ds. \tag{3.18}$$

O nosso objectivo é provar que este funcional é de Liapunov. Mas, em primeiro lugar observe-se que, notando $B_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[g_j(u_j(t - \tau_{ij}) + u_j^*) g_j(u_j^*)]$, tem-se

$$D^+(|x_i(t)|) = \begin{cases} \dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + B_i(t), & \text{se } x_i(t) \geq 0 \\ -\dot{x}_i(t) = b_i x_i(t) - B_i(t), & \text{se } x_i(t) < 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

De (3.19),

$$\begin{array}{ll} \text{se } x_i(t) \geq 0, & -b_i x_i(t) + B_i(t) = -b_i |x_i(t)| + B_i(t) \leq |B_i(t)| - b_i |x_i(t)| \\ \text{se } x_i(t) < 0, & b_i x_i(t) - B_i(t) = -b_i |x_i(t)| - B_i(t) \leq |B_i(t)| - b_i |x_i(t)| \end{array}$$

Em qualquer dos casos tem-se

$$D^{+}(|x_i(t)|) \leq -b_i|x_i(t)| + |B_i(t)| \tag{3.20}$$

Agora a derivada à direita ao longo de uma solução $x(t)$ do funcional definido por (3.18) é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{n}\gamma_i D^{+}|x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\frac{d}{dt}\int_{t-\tau_{ij}}^{t}|x_j(s)|ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\gamma_i|D^{+}x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\left(|x_j(t)| - |x_j(t-\tau_{ij}|\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\left(-b_i|x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||g_j(x_j(t-\tau_{ij}) + u_j^*) - g_j(u_j^*)|\right) \quad (3.21) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\left(|x_j(t)| - |x_j(t-\tau_{ij}|\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\left(-b_i|x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j(t-\tau_{ij})|\right) \quad (3.22) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\left(|x_j(t)| - |x_j(t-\tau_{ij}|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}-\gamma_i b_i|x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_i|a_{ij}||x_j(t)| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(-\gamma_j b_j + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i|a_{ij}|\right)|x_j(t)| \\
&\leq -\mu\sum_{j=1}^{n}|x_j(t)| \quad (3.23) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

onde usámos (3.20), o teorema do Valor Médio e a hipótese (3.7). Como $\dot{V}(t) \leq 0$ ao longo de uma solução $x(t)$, o funcional $V$ definido por (3.18) é um funcional de Liapunov. Assim podemos dizer que $V(t)$ é decrescente ao longo das soluções de (3.6) o que implica que $V(t) \leq V(0)$, para $t \geq 0$. Portanto temos

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i|x_i(t)| \leq V(x)(t) \leq L, \forall t \geq 0 \quad \text{para algum } L,$$

o que implica que $\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|$ é limitada para $t \geq 0$. Pelos resultados de continuação de soluções, as soluções de (3.10) existem para todo $t \geq 0$. Tem-se ainda

$$\begin{aligned} \dot{V}(x)(t) &\leq -\mu \sum_{j=1}^{n} |x_j(t)| \Rightarrow \\ V(x)(t) - V(x)(0) &\leq -\mu \int_0^t \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i(s)| \right) ds, \end{aligned}$$

logo

$$V(x)(t) + \mu \int_0^t \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \right) ds \leq V(x)(0).$$

Segue-se que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \in L_1(0, +\infty). \tag{3.24}$$

A limitação de $x_i(t)$ em $(0, +\infty)$ implica o mesmo da derivada de $x_i(t)$ em $(0, +\infty)$ logo $x_i(t)$ é uniformemente contínua em $(0, +\infty)$.

A continuidade uniforme de $\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|$ em $(0, +\infty)$ juntamente com (3.24) implica que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \to +\infty.$$

Esta última asserção é consequência do Lema 3.10. □

## 3.3 Estabilidade Global para sistemas de tipo Lotka-Volterra

Nesta secção vamos estudar a estabilidade do equilíbrio positivo de uma equação de Lotka-Volterra com atrasos discretos mas num caso mais geral que no capítulo anterior, usando técnicas apresentadas em [5] e em [6]. A equação é a seguinte:

$$\dot{y}_i(t) = y_i(t) \left[ r_i - b_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t - \tau_{ij}) \right] \tag{3.25}$$

onde $r_i, b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\tau_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Suponha-se que existe um equilíbrio positivo $y^*$ de (3.25). Fazendo a mudança de variável $x(t) = y(t) - y^*$ obtém-se a equação

$$\dot{x}_i(t) = (x_i(t) + y_i^*) \left[ -b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \right] \tag{3.26}$$

No que se segue, sejam

$$K = -B + A \quad e \quad \hat{K} = -B + |A|$$

onde $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$, $A = [a_{ij}]$ e $|A| = [|a_{ij}|]$.

Fazendo a linearização da equação (3.26) em torno do equilíbrio $y^*$ obtém-se a seguinte equação:

$$\dot{x}_i(t) = -b_i y_i^* x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* x_j(t - \tau_{ij}) \tag{3.27}$$

que é uma EDF linear do tipo da equação (3.12) que foi estudada na secção 3.1, donde se conclui a sua estabilidade assimptótica global no seguinte resultado

**Teorema 3.12.** *Supondo que existe um equilíbrio positivo $y^*$ de (3.25), este equilíbrio é localmente assimptoticamente estável para todos os $\tau_{ij} \geq 0$ se $\det K \neq 0$ e $-\hat{K}$ é uma M-matriz.*

**Observação 3.13.** *Observe-se que em (3.27) as entradas das matrizes $B$ e $A$ estão multiplicadas por $y_i^* > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Já foi provado no capítulo anterior que $-\hat{K}_1 = diag(y_1^* b_1, \ldots, y_n^* b_n) + [y_i^* |a_{ij}|]$ é também uma M-matriz não singular e $\det K_1 \neq 0$ onde $K_1 = diag(y_1^* b_1, \ldots, y_n^* b_n) + [y_i^* a_{ij}]$. Logo pode aplicar-se o Teorema 3.5 à equação (3.27).*

Consideremos uma EDF geral

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t), \quad t \geq t_0 \tag{3.28}$$

com $f : D \subset \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ contínua. Para estas equações fixamos geralmente um conjunto $S \subset C$, com $[t_0, \infty) \times S \subset D$, como o conjunto das *condições iniciais admissíveis*. Naturalmente, uma solução $y(t)$ com uma condição inicial *admissível* $y_{t_0} = \phi \in S$ diz-se *admissível* se $y_t \in S$ para $t > t_0$ sempre que $y_t$ esteja definida. Sob a hipótese de unicidade de soluções, a solução de (3.28) com condição inicial $y_{t_0} = \phi, \phi \in S$, é denotada por $y(t, t_0, \phi)$.

Apresentamos agora um conjunto de resultados (ver [5,6]) que conduzem à prova da estabilidade assimptótica global do equilíbrio $y^*$ de (3.25).

**Lema 3.14.** *Escolha-se um conjunto $S \subset C$ como o conjunto de condições admissíveis para a equação*

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t), \quad t \geq t_0 \tag{3.29}$$

*onde $f : [t_0, \infty) \times S \to \mathbb{R}^n$ é contínua, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Considere-se $\mathbb{R}^n$ com a norma $|.|_\infty$ e suponha-se que $f$ satisfaz a condição*

***(H1)*** *Para todo $t \geq t_0$ e $\phi \in S$ tal que $|\phi(\theta)|_\infty < |\phi(0)|_\infty$ para $\theta \in [-\tau, 0)$, então $\phi_i(0) f_i(t, \phi) < 0$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|\phi(0)|_\infty = |\phi_i(0)|_\infty$.*

*Então todas as soluções admissíveis de (3.29) estão definidas e são limitadas para $t \geq t_0$. Além disso, se $y(t) = y(t, t_0, \phi)$ ($\phi \in S$) é uma solução admissível de (3.29) e $|y(t)|_\infty \leq K$ para $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ então $|y(t)|_\infty \leq K$ para $t \geq t_0$.*

*Demonstração.* Seja $y(t)$ uma solução admissível de (3.29) em $[t_0 - \tau, a)$, para algum $a > t_0$, com $|y(t)|_\infty \leq K$ para $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. Suponhamos que existe $t_1 > t_0$ tal que $|y(t_1)|_\infty > K$, e defina-se

$$T = \min \left\{ t \in [t_0, t_1] : \max_{s \in [t_0, t_1]} |y(s)|_\infty = |y(t)|_\infty \right\}$$

Temos $|y(T)|_\infty > K$ e

$$|y(t)|_\infty < |y(T)|_\infty \quad para \quad t \in [t_0, T),$$

logo $|y_T(\theta)|_\infty = |y(T + \theta)|_\infty < |y(T)|_\infty$ para $-\tau \leq 0$. Por **(H1)** existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|y(T)|_\infty = |y_i(T)|$ e $y_i(T) f_i(t, y_T) < 0$ para todo $t \geq t_0$. Suponhamos que $y_i(T) > 0$ (o caso $y_i(T) < 0$ é análogo). Visto que

$$y_i(t) \leq |y_i(t)| \leq |y(t)|_\infty \leq |y(T)|_\infty = |y_i(T)| = y_i(T)$$

então $\dot{y}_i(T) \geq 0$. Por outro lado, de (3.29) temos $\dot{y}_i(T) = f_i(T, y_T) < 0$ pois $y_i(T) > 0$ e, por **(H1)**, $y_i(T) f_i(t, y_T) < 0$, o que é uma contradição. Isto prova que $y(t)$ é extensível a $[t_0 - \tau, \infty)$, com $|y(t)|_\infty \leq K$ para todo $t \geq t_0$. $\square$

Note-se que a equação (3.26) tem a forma (3.29), com

$$\begin{aligned} f &= (f_1, \ldots, f_n), \\ f_i(t, \phi) &= f_i(\phi) = (\phi_i(0) + y_i^*) \left[ -b_i \phi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \phi(-\tau_{ij}) \right] \end{aligned}$$

**Proposição 3.15.** *Suponha-se que* $\det K \neq 0$ *e* $-\hat{K}$ *é uma M-matriz não singular. Então a equação (3.26) satisfaz a condição **(H1)**.*

*Demonstração.* Como $-\hat{K}$ é uma M-matriz não singular, pelo Teorema 1.50, existe um vector $d = (d_1, \ldots, d_n) > 0$ tal que $(-\hat{K})d > 0$, ou seja,

$$b_i d_i - \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| d_j > 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.30}$$

Fazendo o escalamento $x_i \mapsto \frac{1}{d_i} x_i = z_i$, $i = 1, \ldots, n$, na equação (3.26) obtém-se a equação

$$\dot{z}_i(t) = \left( z_i(t) + \frac{1}{d_i} y_i^* \right) \left[ -b_i d_i z_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j z_j(t - \tau_{ij}) \right]. \tag{3.31}$$

Isto prova que, sem perda de generalidade, pode supor-se que (3.30) é verdadeira com $d_1 = \ldots = d_n = 1$, ou seja, tem-se

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| > 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.32}$$

Para (3.26) o conjunto $S$ das condições iniciais admissíveis é o conjunto

$$S = \{\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : \phi_i(\theta) > -y_i^*, \theta \in [-h, 0], i = 1, \ldots, n\}$$

Para $\phi \in S$ com $||\phi||_\infty = |\phi(0)|_\infty > 0$, seja $i$ tal que $||\phi||_\infty = |\phi_i(0)|$.

Suponha-se $\phi_i(0) > 0$ (para $\phi_i(0) < 0$ é análogo). Então,

$$\begin{aligned}
\phi_i(0)f_i(\phi) &= \phi_i(0)(\phi_i(0)+y_i^*)\left[-b_i\phi_i(0)+\sum_{j=1}^n a_{ij}\phi_j(-\tau_{ij})\right] \\
&\leq \phi_i(0)(\phi_i(0)+y_i^*)\left[-b_i\phi_i(0)+\sum_{j=1}^n |a_{ij}||\phi_j(-\tau_{ij})|\right] \\
&\leq \phi_i(0)(\phi_i(0)+y_i^*)\phi_i(0)\left[-b_i+\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right] \qquad (3.33) \\
&< 0 \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

onde a passagem para (3.33) se justifica por $|\phi_j(\theta)| \leq |\phi_i(0)| = \phi_i(0)$ e a passagem para (3.34) justifica-se pelo facto de se ter $\phi_i(0) > 0$, $(\phi_i(0)+y_i^*) > 0$, por hipótese, e $-b_i + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 0$, por (3.32). Daqui se conclui que a equação (3.26) satisfaz **(H1)**. □

Agora enunciamos e demonstramos o teorema que dá a estabilidade assimptótica global da equação (3.25).

**Teorema 3.16.** *Para a equação (3.25) suponha-se que existe um equilíbrio positivo $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ e que $\det K \neq 0$ e $-\hat{K}$ é uma M-matriz não singular. Então $y^*$ é globalmente assimptoticamente estável no conjunto das soluções positivas.*

*Demonstração.* Depois de transladarmos $y^*$ para a origem, consideremos a equação (3.26). Do Lema 3.14 e da Proposição 3.15, todas as soluções de (3.26) estão definidas e são limitadas em $[0, \infty)$ e a origem é uniformemente estável. Resta então provar que $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, para todas as soluções admissíveis de (3.26). Depois de fazermos um escalamento $x_i(t) \mapsto \frac{1}{d_i}x_i(t) = z_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, podemos assumir que (3.30) é válida para $d = (1, \ldots, 1)$, ou seja, tem-se (3.32). Seja $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ uma solução para (3.26) e definam-se

$$\begin{aligned}
-v_i = \liminf_{t\to\infty} x_i(t), \qquad & u_i = \limsup_{t\to\infty} x_i(t), \quad i = 1, \ldots, n \\
v = \max_{1\leq i\leq n} v_i, \qquad & u = \max_{1\leq i\leq n} u_i.
\end{aligned}$$

Note-se que $-y_i^* \leq -v_i \leq u_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. É suficiente provar que $\max(u, v) = 0$. Suponha-se então que $|v| \leq u$, de modo que $\max(u, v) = u$

(o caso $|u| \leq v$ é análogo). Seja $i$ tal que $u_i = u$, e fixe-se $\epsilon > 0$ pequeno. Mostre-se que existe um sucessão $t_k \to \infty$ tal que

$$x_i(t_k) \to u, \quad b_i x_i(t_k) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t_k - \tau_{ij}) \to 0 \quad e \quad ||x_{t_k}||_\infty \leq u + \epsilon. \tag{3.35}$$

Para isso consideram-se dois casos separados: o caso de $x_i(t)$ ser monótona, para $t$ suficientemente grande, e o caso de não o ser. Note-se já que, por definição de $u$ e $v$, para $t$ grande tem-se $||x_t|| \leq u + \epsilon$.

**Caso 1:** Suponha-se que $x_i(t)$ não é monótona. Considere-se $(t_k)$ com $t_k \to \infty$ uma sucessão de pontos de máximos locais tais que $x_i(t_k) \to u_i = u$. Claramente, $\dot{x}_i(t_k) = 0 = b_i x_i(t_k) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t_k - \tau_{ij})$.

**Caso 2:** Suponha-se que $x_i(t)$ é monótona, para $t$ suficientemente grande. Neste caso

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = u \tag{3.36}$$

e para $t$ grande, tem-se $\dot{x}_i(t) \leq 0$ ou $\dot{x}_i(t) \geq 0$.

Se $\dot{x}_i(t) \geq 0$ para $t$ grande, então de (3.26) tem-se $b_i x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \leq 0$ logo

$$\limsup_{t\to\infty} (b_i x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t_k - \tau_{ij})) := c \leq 0$$

Se $c < 0$, então existe $t_1 > 0$ tal que $b_i x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) < c/2$ para $t \geq t_1$ implicando que $\dot{x}_i(t) \geq -c(x_i(t) + y_i^*)/2$ e

$$x_i(t) + y_i^* \geq (x_i(t_1) + y_i^*) e^{-\frac{c}{2}(t-t_1)} \to +\infty, \quad t \geq 0$$

o que é absurdo. Logo $c = 0$ o que prova (3.35).

Se $\dot{x}_i(t) \leq 0$ para $t$ grande, de modo semelhante obtemos

$$\liminf_{t\to\infty} (b_i x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij})) := d \geq 0$$

Suponhamos que $d > 0$. Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $t_2$ tal que para $t \geq t_2$ temos $b_i x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) > d/2$ e $||x_t|| \leq u + \epsilon$. Então para $t \geq t_2$

$$0 < x_i(t) + y_i^* \leq (x_i(t_2) + y_i^*) e^{-\frac{d}{2}(t-t_2)} \to 0, \quad t \to \infty$$

assim conclui-se que

$$y_i^* + \lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \Leftrightarrow u = -y_i^* < 0.$$

Mas então viria, para $t \geq t_2$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{d}{2} &\leq b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j(t-\tau_{ij})| \\ &\leq b_i x_i(t) + u\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \longrightarrow \left(-b_i + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) u, \quad t \to \infty \end{aligned}$$

Como $-b_i + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 0$ e $u \leq 0$ por (3.30), conclui-se que $d = 0$, o que prova (3.35).

Por (3.26), a limitação de $x(t)$ implica que $\dot{x}(t)$ é também limitada em $[0, \infty)$. Logo a sucessão $(x_{t_k})$ em $C$ é uniformemente limitada e equicontínua. Tomando uma subsucessão, pode supor-se que $x_{t_k} \to \phi$ em $C$, para algum $\phi \in \bar{S}$. De (3.35), fazendo $k \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ obtemos

$$\phi_i(0) = u, \quad b_i u - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\phi_j(-\tau_{ij}) = 0 \quad e \quad ||\phi||_\infty = u \tag{3.37}$$

De (3.37) deduz-se que

$$0 = b_i u - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\phi_j(-\tau_{ij}) \geq u\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \geq 0$$

e de (3.32) conclui-se que $u = 0$, mostrando que $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ e completando a prova. $\square$

# Bibliografia


[1] H. Amann, *Ordinary Differential Equations: An introduction to nonlinear analysis*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1990.

[2] S.A. Campbell, *Delay independent stability for additive neural networks*, Differential Equations Dynam. Systems **9** (2001), 115-138.

[3] M.A. Carreira, M.S.M. Nápoles, *Variável Complexa - Teoria Elementar e Exercícios Resolvidos*, 1ªed., McGraw Hill, Lisboa, 1998.

[4] T. Faria, Notas do curso de *Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações*, Departamento de Matemática da FCUL, ano lectivo 2006-2007.

[5] T. Faria, J.J. Oliveira, *Local and global stability for Lotka-Volterra systems with distributed delays and instantaneous negative feedbacks*, J. Differential Equations **244** (2008), 1049-1079.

[6] T. Faria, J.J. Oliveira, *Boundedness and Global Exponential Stability for Delayed Differential Equations with Applications*, preprint.

[7] M. Farkas, *Dynamical Models in Biology*, Academic Press, London, 2001.

[8] M. Fiedler, *Special Matrices and their Applications in Numerical Mathematics*, Martinus Nijhoff Publ. (Kluwer), Dordrecht, 1986.

[9] M. Figueira, Notas do curso de *Análise Numérica II*, Departamento de Matemática da FCUL, ano lectivo 2004-2005.

[10] M.C. Gomes, A. Margheri, Notas de curso de *Modelos Biomatemáticos*, Departamentos de Matemática e de Biologia Vegetal da FCUL, ano lectivo 2005-2006.

[11] K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer, Dordrecht, 1992.

[12] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[13] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[14] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[15] J. Hofbauer, K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[16] J.Hofbauer, J.W.-H. So, *Diagonal dominance and harmless off-diagonal delays*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2675-2682.

[17] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[18] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, New York, 1993.

[19] P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices (2nd ed.)*, Academic Press, New York, 1985.

[20] J.J. Oliveira, *Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Lineares Autónomas*, Seminário de Mestrado, Departamento de Matemática da FCUL, 2002.